

ISSN 1026–2237

DOI 10.18522/1026–2237

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Северо-Кавказский
регион*

ЕСТЕСТВЕННЫЕ

НАУКИ

2022

4-1

Журнал основан в 1972 г. Ю.А. Ждановым

Главная редакция:

М.А. Боровская (главный редактор),
В.Е. Закруткин (заместитель главного редактора),
Е.А. Шинкаренко (ответственный секретарь)

Редакционная коллегия:

М.А. Боровская – главный редактор, чл.-корр. РАО, доктор эконом. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.Е. Закруткин – председатель редколлегии, доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Я.М. Ерусалимский – зам. председателя редколлегии, кандидат физ.-мат. наук, доктор техн. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.А. Бабешко – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор, Кубанский государственный университет, Россия
Б.С. Карамурзов – доктор техн. наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Россия
В.И. Колесников – академик РАН, доктор техн. наук, профессор, Ростовский государственный университет путей сообщения, Россия
А.Г. Кусраев – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный математический институт ВНЦ РАН, Россия
Г.Г. Матишов – академик РАН, доктор геол.-мин. наук, профессор, Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, Россия
В.И. Минкин – академик РАН, доктор хим. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
М.Х. Рабаданов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Дагестанский государственный университет, Россия
А.В. Абанин – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Г.Г. Бабаян – доктор техн. наук, Центр эколого-ноосферных исследований НАН РА, Армения
О.С. Безуглова – доктор биол. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Н.И. Бойко – доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.В. Бочкарев – доктор геол.-мин. наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, Россия
Л.С. Ворович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
О.Н. Демина – доктор биол. наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Россия
А.Г. Захаров – доктор техн. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Л.М. Зубов – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
М.Ю. Жуков – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.Н. Карапетянц – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Д.В. Карелин – доктор биол. наук, Институт географии РАН, Россия
М.И. Карякин – доктор физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
С.Б. Климентов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
С.И. Колесников – кандидат геогр. наук, доктор с.-х. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Е.М. Колосова – кандидат физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Россия
Г.В. Куповых – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
С.В. Курбатов – доктор хим. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.М. Лерер – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
С.Н. Мелихов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.А. Миноранский – доктор с.-х. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.В. Онищенко – доктор геогр. наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Россия
О.В. Назаренко – кандидат геогр. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
С.Г. Парада – доктор геол.-мин. наук, доцент, Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, Россия
Г.В. Пироговская – доктор с.-х. наук, профессор, Институт почвоведения и агрохимии НАН РБ, Белоруссия
В.С. Рабинович – доктор физ.-мат. наук, профессор, Национальный политехнический институт, Мексика
М.А. Сазыкина – доктор биол. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
В.И. Силаев – доктор геол.-мин. наук, Институт геологии им. Н.П. Юшкина Коми НЦ УрО РАН, Россия
В.Н. Труфанов – доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
П. Фатталь – доктор наук, профессор, Университет Нанта, Франция
Ю.А. Федоров – доктор геогр. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.Д. Хованский – кандидат геол.-мин. наук, доктор геогр. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия

Учредители:

Дагестанский государственный технический университет,
Дагестанский государственный университет,
Донской государственный технический университет,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Кубанский государственный технологический университет,
Ростовский государственный университет путей сообщения,
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова,
Южный федеральный университет

Journal was founded in 1972 by Yu.A. Zhdanov

Main Edition:

M.A. Borovskaya (Editor-in-Chief),
V.E. Zakrutkin (Deputy Editor-in-Chief),
E.A. Shinkarenko (Assistant Editor)

Editorial Board:

M.A. Borovskaya - Editor-in-Chief, Corresponding Member, Russian Academy of Education, Doctor of Economics, Professor, Southern Federal University, Russia
V.E. Zakrutkin - Chairman of the Editorial Board, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
Ya.M. Erusalimsky - Deputy Chairman of the Editorial Board, Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Technical Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
V.A. Babeshko - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kuban State University, Russia
B.S. Karamurзов - Doctor of Technical Sciences, Professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Russia
V.I. Kolesnikov - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Rostov State Transport University, Russia
A.G. Kusraev - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia
G.G. Matishov - Academician, Sciences, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Federal Research Center the Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia
V.I. Minkin - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Chemistry, Professor, Southern Federal University, Russia
M.H. Rabadanov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Dagestan State University, Russia
A.V. Abanin - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
G.G. Babayan - Doctor of Technical Sciences, Center for Ecological and Noospheric Studies, National Academy of Sciences of Armenia, Armenia
O.S. Bezuglova - Doctor of Biology, Professor, Southern Federal University, Russia
N.I. Boiko - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
A.V. Bochkarev - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Russia
L.S. Vorovich - Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
O.N. Dyomina - Doctor of Biological Sciences, Professor, Aliev Karachay-Cherkess State University, Russia
M.Y. Zhukov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
A.G. Zakharov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
L.M. Zubov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
A.N. Karapetyants - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
Dmitry V. Karelin - Doctor of Biology, Institute of Geography of the Russian Academy of Sciences
M.I. Karjakin - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
S.B. Klimentov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
S.I. Kolesnikov - Candidate of Geography, Doctor of Agricultural Science, Professor, Southern Federal University, Russia
E.M. Kolosova - Candidate of Physics and Mathematics, Southern Federal University, Russia
G.V. Kupovykh - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
S.V. Kurbatov - Doctor of Chemistry, Professor, Southern Federal University, Russia
A.M. Lerer - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
S.N. Melikhov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
V.A. Minoranskiy - Doctor of Agricultural Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
V.V. Onishchenko - Doctor of Geography, Professor, Aliev Karachay-Cherkess State University, Russia
O.V. Nazarenko - Candidate of Geography, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
S.G. Parada - Doctor of Geology and Mineralogy, Associate Professor, Federal Research Center the Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia
G.V. Pirogovskaya - Doctor of Agricultural Sciences, Professor, Institute of Soil Science and Agrochemistry, National Academy of Sciences of Belarus, Belarus
V.S. Rabinovich - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National Polytechnic Institute, Mexico
M.A. Sazykina - Doctor of Biological Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
Valerii I. Silaev - Doctor of Geology and Mineralogy, Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia
V.N. Trufanov - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
P. Fattal - PhD, Professor, University of Nantes, France
Yu.A. Fedorov - Doctor of Geography, Professor, Southern Federal University, Russia
A.D. Khovanskiy - Candidate of Geology and Mineralogy, Doctor of Geography, Professor, Southern Federal University, Russia

The Founders

Dagestan State Technical University,
Dagestan State University,
Don State Technical University,
Berebekov Kabardino-Balkarian State University,
Kuban State Technological University,
Rostov State Transport University,
Rostov State University of Economics,
Platov South Russian State Polytechnical University,
Southern Federal University

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ. СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

BULLETIN OF HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTIONS. NORTH CAUCASUS REGION

doi 10.18522/1026-2237-2022-4-1

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77 – 77252 от 25.11.2019,
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций
Научный журнал
Издается с 1973 г.
Периодичность серии 4 номера в год
№ 4-1 (216-1) 2022 г.

Registration certificate
PI No. FS 77 - 77252 dated 25.11.2019
issued Federal Service for Supervision
of Communications, Information Technology,
and Mass Media
Science magazine
Published since 1973.
4 issues per a year
No. 4-1 (216-1) 2022

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

NATURAL SCIENCE

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Бештоков М.Х. Устойчивость и сходимость разностной схемы, аппроксимирующей нелокальную краевую задачу для нагруженного уравнения влагопереноса с производными дробного порядка 4	Beshtokov M.Kh. Stability and Convergence of a Difference Scheme Approximating a Nonlocal Boundary Value Problem for a Loaded Moisture Transfer Equation with Fractional Order Derivatives 4
Ватульян А.О., Нестеров С.А. Градиентная модель изгиба неоднородной пьезоэлектрической балки 10	Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Gradient Bending Model of Inhomogeneous Piezoelectric Beam 10
Землякова И.А. Интерполяция неполного рынка полным для тринomialной модели в задаче квантильного хеджирования 21	Zemlyakova I.A. Interpolation of an Incomplete Market by a Complete One for a Trinomial Model in the Quantile Hedging Problem 21
Колесников М.Н., Павлова А.В., Телятников И.С. К исследованию влияния дефекта покрытия на поверхностный волновой процесс 29	Kolesnikov M.N., Pavlova A.V., Telyatnikov I.S. On the Study of the Coating Defect Influence on the Surface Wave Process 29
Полякова Н.М. Начально-краевая задача о течении в кровеносном сосуде 42	Polyakova N.M. Initial Boundary Value Problem of the Flow in a Blood Vessel 42
Попов В.А. Локально изометричные римановы аналитические пространства 55	Popov V.A. Locally Isometric Riemannian Analytic Spaces 55
Юдин А.С. Эффективный метод построения амплитудно-частотных характеристик оболочки 65	Yudin A.S. Effective Method for Constructing Amplitude-Frequency Shell Characteristics 65

ПОСВЯЩАЕТСЯ 100-ЛЕТИЮ М.М. ДРАГИЛЕВА

DEDICATED TO THE 100TH ANNIVERSARY OF M.M. DRAGILEV

Абанин А.В., Ватульян А.О., Карякин М.И., Мелихов С.Н., Налбандян Ю.С. Михаил Михайлович Драгилев (1922–2020) – выдающийся математик и учитель 75	Abanin A.V., Vatulyan A.O., Karyakin M.I., Melikhov S.N., Nalbandyan Yu.S. Mikhail Mikhailovich Dragilev (1922-2020) - Outstanding Mathematicist and Teacher 75
Абанин А.В., Костина В.О. Степенная ограниченность и эргодичность в среднем дифференциального оператора в весовых пространствах целых функций ... 78	Abanin A.V., Kostina V.O. Power Boundedness and Mean Ergodicity of the Differentiation Operator on Weighted Spaces of Entire Functions 78

<i>Абанин А.В., Кораблина Ю.В.</i> Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций	83	<i>Abanin A.V., Korablina J.V.</i> Compactness of Linear Operators on Quasi-Banach Spaces of Holomorphic Functions	83
<i>Дронов А.К., Каплицкий В.М.</i> Интерполяционные свойства положительных операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей, и их применение к теории базисов в пространствах Фреше	90	<i>Dronov A.K., Kaplitskii V.M.</i> Interpolation Properties of Positive Operators Bounded on Cones in Banach Spaces of Numerical Sequences and Their Application to the Theory of Bases in Fréchet Spaces.....	90
<i>Иванов П.А.</i> Произведение Дюамеля в пространствах целых функций экспоненциального типа	96	<i>Ivanov P.A.</i> The Duhamel Product in Spaces of Entire Functions of Exponential Type	96
<i>Иванова О.А., Мелихов С.Н.</i> О сопряженном к пространству функций, голоморфных на замкнутом полидиске, с мультипликативной сверткой.....	102	<i>Ivanova O.A., Melikhov S.N.</i> On the Conjugate to the Space of Functions That are Holomorphic on a Closed Polydisk with Multiplicative Convolution	102
<i>Саранчук Ю.С.</i> Однородные уравнения типа π -свертки	109	<i>Saranchuk Yu.S.</i> Homogeneous Equations of π -Convolution Type.....	109

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Международная научная конференция «ОТНА-2022: современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа XII», посвященная 80-летию профессора Николая Карапетовича Карапетянца (1942–2005) (г. Ростов-на-Дону, 21–26 августа 2022 г.)....	120
--	-----

Указатель материалов, опубликованных в журнале «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» в 2022 г.	122
---	-----

SCIENTIFIC LIFE

International Scientific Conference "OTNA-2022: Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis XII" (Rostov-on-Don, August 21–26, 2022).....	120
--	-----

Index of Articles Published in the Journal "Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science" in 2022.....	122
---	-----

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Научная статья
УДК 519.63
doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-4-9

**УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ,
АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ НЕЛОКАЛЬНУЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ
ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА
С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

Мурат Хамидбиевич Бештоков

*Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра
Российской академии наук, Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Россия
beshtokov-murat@yandex.ru*

Аннотация. Изучается краевая задача для нагруженного уравнения влагопереноса с двумя дробными производными Герасимова – Капуто разных порядков (α, β) , переменными коэффициентами и нелокальным граничным условием интегрального вида. На равномерной сетке построена разностная схема порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$. Исследование проводится методом энергетических неравенств. При различных соотношениях между порядками дробных производных α и β для решения поставленной нелокальной краевой задачи получены априорные оценки в разностной трактовке, из чего следуют единственность решения поставленной задачи, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Ключевые слова: уравнение влагопереноса, дробная производная Герасимова – Капуто, нелокальная краевая задача, разностные схемы, априорная оценка

Для цитирования: Бештоков М.Х. Устойчивость и сходимость разностной схемы, аппроксимирующей нелокальную краевую задачу для нагруженного уравнения влагопереноса с производными дробного порядка // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 4–9.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

**STABILITY AND CONVERGENCE OF A DIFFERENCE SCHEME
APPROXIMATING A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR A LOADED MOISTURE TRANSFER EQUATION
WITH FRACTIONAL ORDER DERIVATIVES**

Murat Kh. Beshtokov

*Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center, Russian Academy
of Sciences, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russia
beshtokov-murat@yandex.ru*

© Бештоков М.Х., 2022

Abstract. We study a boundary value problem for a loaded moisture transfer equation with two Gerasimov-Caputo fractional derivatives of different orders (α, β), variable coefficients, and a nonlocal integral boundary condition. On a uniform grid a difference scheme of order of approximation $O(h^2 + \tau^2)$ for $\alpha = \beta$ and $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$ for $\alpha \neq \beta$ is constructed. The study is carried out by the method of energy inequalities. For different ratios between the orders of fractional derivatives α and β , for solving the posed nonlocal boundary value problem, a priori estimates in the difference interpretation are obtained, from which the uniqueness of the solution of the posed problem, the continuous and uniform dependence of the solution on the input data, and the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme.

Keywords: transfer equation, Gerasimov-Caputo fractional derivative, nonlocal boundary value problem, difference schemes, a priori estimate

For citation: Beshtokov M.Kh. Stability and Convergence of a Difference Scheme Approximating a Nonlocal Boundary Value Problem for a Loaded Moisture Transfer Equation with Fractional Order Derivatives. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):4-9. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе [1–3] принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности.

Неклассичность рассматриваемой в работе задачи заключается в том, что вместо первой производной по времени уравнение содержит производную дробного порядка в смысле Герасимова – Капуто, уравнение является нагруженным, граничное условие содержит интеграл по пространственной переменной. Исследование таких задач представляет интерес с точки зрения как построения общей теории дифференциальных уравнений, так и приложений, причем приложений в математическом моделировании и математике.

Численным методам решения краевых задач для различных уравнений диффузии посвящены работы [4–7], уравнению влагопереноса – [8, 9]. В работах [7, 8] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае (при $\alpha=1$), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках.

Настоящая работа является продолжением серии работ автора в этом направлении [6, 8, 9].

Постановка нелокальной задачи

В замкнутом прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим следующую задачу:

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x, t)u(x_0, t) + f(x, t), 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$-\Pi(l, t) = \int_0^l \beta(x, t)u(x, t)dx - \mu(t), 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l, \quad 0 < c_0 \leq k(x, t), \eta(x) \leq c_1, \quad (4)$$

$$|q(x, t)|, |r(x, t)|, |r_x(x, t)|, |k_x(x, t)|, |\beta(x, t)| \leq c_2, \quad (5)$$

$\partial_{0t}^\gamma u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau$ – дробная производная в смысле Герасимова – Капуто порядка γ , $0 < \gamma < 1$; x_0 – произвольная точка интервала $[0, l]$.

В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (1)–(4) существует и обладает нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения

и граничных условий удовлетворяют необходимым условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

Обозначим через M_i ($i = 1, 2, \dots$) положительные постоянные числа, зависящие только от входных данных исходной задачи и не зависящие от шагов сетки h и τ .

Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1)–(4) применим метод конечных разностей. В замкнутом прямоугольнике \bar{Q}_T введем равномерную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \bar{0}, \bar{N}, h = l/N\}$; $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau = T/j_0\}$.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \chi_i^j \left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (6)$$

$$y(0, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (7)$$

$$-\left(\chi_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_N y_{\bar{x},N}) \right) = \sum_{i=0}^N \beta y_i^{(\sigma)} \bar{h} + 0,5h \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N + d_N^j \left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) \right) - \tilde{\mu}, \quad x = l, \quad (8)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\gamma y = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\gamma, \sigma)} y_t^s$ – дискретный аналог дробной производной Герасимова –

Капуто порядка γ , $0 < \gamma < 1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\gamma})$ при $\sigma = 1 - \frac{\gamma}{2}$, $O(\tau^{2-\gamma})$ – при $\sigma = 0,5$ [7];

$$x_{i_0} \leq x_0 \leq x_{i_0+1}, \quad x_{i_0}^- = \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h}, \quad x_{i_0}^+ = \frac{x_s - x_{i_0}}{h}, \quad \tilde{\mu}(t_{j+\sigma}) = \mu(t_{j+\sigma}) + 0,5h\varphi_N^j, \quad \text{при } l \geq 1,$$

$$a_0^{(\gamma, \sigma)} = \sigma^{1-\gamma}, \quad a_l^{(\gamma, \sigma)} = (l + \sigma)^{1-\gamma} - (l - 1 + \sigma)^{1-\gamma},$$

$$b_l^{(\gamma, \sigma)} = \frac{1}{2-\gamma} [(l + \sigma)^{2-\gamma} - (l - 1 + \sigma)^{2-\gamma}] - \frac{1}{2} [(l + \sigma)^{1-\alpha} + (l - 1 + \sigma)^{1-\gamma}], \quad \text{при } j = 0,$$

$$c_0^{(\gamma, \sigma)} = a_0^{(\gamma, \sigma)};$$

$$\text{при } j > 0 \quad c_s^{(\gamma, \sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\gamma, \sigma)} + b_1^{(\gamma, \sigma)}, & s = 0; \\ a_s^{(\gamma, \sigma)} + b_{s+1}^{(\gamma, \sigma)} - b_s^{(\gamma, \sigma)}, & 1 \leq s \leq j - 1; \\ a_j^{(\gamma, \sigma)} - b_j^{(\gamma, \sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$$c_s^{(\gamma, \sigma)} > \frac{1-\gamma}{2} (s + \sigma)^{-\gamma} > 0, \quad \sigma = 1 - \frac{\gamma}{2}, \text{ если } \alpha = \beta; \quad \sigma = 0,5, \text{ если } \alpha \neq \beta,$$

$$a_i^j = k(x_{i-0,5}, t_{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-0,5}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{r^{\pm j}(x, t_{j+\sigma})}{k(x_i, t_{j+\sigma})}, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_{j+\sigma}),$$

$$r(x, t_{j+\sigma}) = r^+(x, t_{j+\sigma}) + r^-(x, t_{j+\sigma}), \quad |r(x, t_{j+\sigma})| = r^+(x, t_{j+\sigma}) - r^-(x, t_{j+\sigma}),$$

$$r^+(x, t_{j+\sigma}) = 0,5(r(x, t_{j+\sigma}) + |r(x, t_{j+\sigma})|) \geq 0,$$

$$r^-(x, t_{j+\sigma}) = 0,5(r(x, t_{j+\sigma}) - |r(x, t_{j+\sigma})|) \leq 0,$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y^j, \quad d_i^j = q(x_i, t_{j+\sigma}), \quad a^{(+1)} = a_{i+1},$$

$$\chi(x, t) = \frac{1}{1+R(x, t)}; \quad R(x, t) = \frac{0,5h|r(x, t)|}{k(x, t)} - \text{разностное число Рейнольдса.}$$

Априорную оценку решения разностной задачи (6)–(8) найдем методом энергетических неравенств. Для этого введем скалярные произведения и норму в следующем виде:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i \bar{h}, \quad (u, u) = \|u\|_0^2, \quad (u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad \bar{h} = \begin{cases} 0,5h, & i = N; \\ h, & i \neq 0, N. \end{cases}$$

Умножим теперь (6) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) &= (\chi (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) + (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_i y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^- ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (d_i^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) + (\varphi, y^{(\sigma)}). \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуя суммы, входящие в тождество, с учетом (7) и [7, лемма 1], получим

$$\begin{aligned} (\chi (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) &= \chi ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}|_0^N - (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\chi y^{(\sigma)})_{\bar{x}}] = \\ &= \chi ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}|_0^N - (a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - (a\chi^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] \leq \\ &\leq \chi ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}|_0^N - (a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - \frac{1}{(1+hM_1)} (a\chi, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2]; \\ (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) &= y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma y_{\bar{x}})|_0^N - (\gamma, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (y_{\bar{x}})] \leq \\ &\leq y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma y_{\bar{x}})|_0^N - \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Принимая во внимание преобразования (10), из (9) получаем

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) + M_1 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \varepsilon \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \\ &+ (\chi_i^j ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x}})) y^{(\sigma)}|_0^N + M_2(\varepsilon) \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + (b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (d_i^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) + (\varphi, y^{(\sigma)}). \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (11)

$$\begin{aligned} (\chi_i^j ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x}})) y^{(\sigma)}|_0^N &= (\chi_N^j ay_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x},N})) y_N^{(\sigma)} = \\ &= [\mu + \frac{h}{2} \varphi_N^j - \sum_{i=0}^N \beta y_i^{(\sigma)} - \frac{h}{2} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - d_N (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+))] y_N^{(\sigma)} \leq \\ &\leq -0,5h y_N^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N + M_3(\varepsilon) \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \varepsilon \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_4(\varepsilon) \mu^2 + \\ &+ 0,5h y_N^{(\sigma)} \varphi_N^j + 0,5h y_N^{(\sigma)} d_N (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая (12) при $\varepsilon = \frac{M_1}{2}$, из (11) находим

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) + \frac{M_1}{2} \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_4 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + (b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - \\ &- (d_i^j (y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+), y^{(\sigma)}) + \frac{1}{2} \mu^2 + (\varphi, y^{(\sigma)}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) после несложных преобразований с учетом неравенства Коши получим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq M_5 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_6 (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2). \quad (14)$$

Перепишем (14) в другой форме

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_7 \|y^{j+1}\|_0^2 + M_8 \|y^j\|_0^2 + M_6 (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2). \quad (15)$$

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. Тогда на основании [8, лемма 7] из (15) получаем

$$\|y\|_0^2 \leq M_9 (\|y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu^2)), \quad (16)$$

где $\|y^0\|_1^2 = \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2$.

2. В случае, когда $\alpha = \beta$, из (15) получаем

$$\|y\|_1^2 \leq M_{10} (\|y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu^2)). \quad (17)$$

3. В случае, когда $\alpha < \beta$, из (15) с учетом (7) и неравенства $\|y^{(\sigma)}\|_0^2 \leq 2l^2 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2$ [10] получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{11} \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_{12} (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2). \quad (18)$$

На основании [8, лемма 7] из (17) находим

$$\|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{12} (\|y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu^2)). \quad (19)$$

Теорема. Пусть выполнены условия (5). Тогда существует такое малое $\tau_0 = \tau_0(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma)$, что если $\tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (6)–(8) справедливы априорные оценки: (16) – в случае, когда $\alpha > \beta$; (17), когда $\alpha = \beta$; (19), когда $\alpha < \beta$.

Из полученных априорных оценок (16), (18) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (6)–(8) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (6)–(8) к решению дифференциальной задачи (1)–(4), тогда существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедливы оценки:

1) в случае, когда $\alpha > \beta$: $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_0^2 \leq M(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$;

2) в случае, когда $\alpha = \beta$: $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1^2 \leq M(h^2 + \tau^2)$;

3) в случае, когда $\alpha < \beta$: $\|y_x^{j+1} - u_x^{j+1}\|_0^2 \leq M(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$,

где $M - const > 0$, не зависящая от h и τ .

Заключение

Рассмотрена нелокальная краевая задача для одномерного по пространству нагруженного уравнения влагопереноса с переменными коэффициентами и двумя операторами дробного дифференцирования Герасимова – Капуто разных порядков α и β . На равномерной сетке построена разностная схема порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$. При различных соотношениях между порядками дробных производных α и β для решения поставленной нелокальной краевой задачи получены априорные оценки в разностной трактовке, из чего следуют единственность решения поставленной задачи, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Список источников

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Диф. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Дженалиев М.Т. О квадратичном функционале в задаче Коши для нагруженного дифференциально-операторного уравнения первого порядка // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, № 12. С. 2029–2037.
3. Cannon J.R., Yin N.M. On a class of nonlinear nonclassical parabolic problems // J. Different. Equat. 1989. № 79. P. 266–288.
4. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткий И.А., Юрков Ю.И. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии. М.: Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2002. 57 с.
5. Алиханов А.А., Березгов А.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 9. С. 1619–1628.
6. Бештоков М.Х., Водахова В.А. Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, вып. 4. С. 459–482.
7. Alikhanov A.A. A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation // J. of Computational Physics. 2015. № 280. P. 424–438.
8. Бештоков М.Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2019. Т. 59, № 2. С. 185–202.
9. Beshtokov M.Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. Vol. 158, № 1. P. 1–6.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 656 с.

References

1. Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications. *Dif. uravneniya = Differential Equations*. 1983;19(1):86-94. (In Russ.).

2. Dzhemaliev M.T. On a quadratic functional in the Cauchy problem for a loaded first-order differential operator equation. *Dif. uravneniya = Differential Equations*. 1995;31(12):2029-2037. (In Russ.).
3. Cannon J.R., Yin N.M. On a class of nonlinear nonclassical parabolic problems. *J. Different. Equat.* 1989;(79):266-288.
4. Goloviznin V.M., Kiselev V.P., Korotkiy I.A., Yurkov Yu.I. *Some features of computing algorithms for the equations fractional diffusion*. Moscow: Nuclear Safety Institute RAS Press, 2002. 57 p. (In Russ.).
5. Alikhanov A.A., Berezgov A.M., Shkhanukov-Lafishev M.Kh. Boundary Value Problems for Certain Classes of Loaded Differential Equations and Solving them by Finite Difference Methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2008;48(9):1581-1590.
6. Beshtokov M.Kh., Vodakhova V.A. Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection-diffusion equation. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki = The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2019;29(4):459-482. (In Russ.).
7. Alikhanov A.A. A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*. 2015;(280):424-438.
8. Beshtokov M.Kh. Numerical analysis of initial-boundary value problem for a Sobolev-type equation with a fractional-order time derivative. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2019;59(2):175-192.
9. Beshtokov M.Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2016;158(1):1-6.
10. Samarskiy A.A. *Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka Publ.; 1983. 656 p. (In Russ.).

Информация об авторе

М.Х. Бештоков – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник.

Information about the author

M.Kh. Beshtokov - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher.

*Статья поступила в редакцию 30.06.2022; одобрена после рецензирования 14.07.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 30.06.2022; approved after reviewing 14.07.2022; accepted for publication 15.11.2022.*

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-10-20

ГРАДИЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБА НЕОДНОРОДНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ БАЛКИ

Александр Ованесович Ватульян¹, Сергей Анатольевич Нестеров²

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

¹aovatulyan@sfedu.ru

²1079@list.ru

Аннотация. Исследована задача изгиба горизонтально неоднородной пьезоэлектрической кантилевой балки с учетом масштабных эффектов. Нижняя и верхняя поверхности балки электродированы. Рассмотрены три вида нагружения: равномерно распределенной по длине нагрузкой; поперечной силой на другом торце балки; подачей электрического потенциала на верхний электрод. Изгиб балки моделируется на основе гипотез Эйлера – Бернулли и квадратичного распределения электрического потенциала. На основе применения вариационного принципа градиентной электроупругости получена система дифференциальных уравнений изгиба и электростатики, а также расширенный спектр граничных условий. Для нахождения изгибающего момента и прогиба срединной линии однородной балки получены точные аналитические выражения. В случае неоднородной балки при больших значениях масштабного параметра решение построено на основе метода пристрелки. На конкретных примерах проведены вычисления моментов и прогиба в случае как однородной, так и неоднородной балки. Выяснено влияние механического и электростатического градиентных параметров, коэффициента электромеханической связанности, параметра неоднородности на распределение прогибов.

Ключевые слова: балка Эйлера – Бернулли, градиентная теория электроупругости, масштабный эффект, неоднородные материалы, метод пристрелки, прогиб срединной линии, электрический потенциал, коэффициент электромеханической связанности

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

Для цитирования: Ватульян А.О., Нестеров С.А. Градиентная модель изгиба неоднородной пьезоэлектрической балки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 10–20.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

GRADIENT BENDING MODEL OF INHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC BEAM

Alexander O. Vatulyan¹, Sergey A. Nesterov²

¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

²Southern Mathematical Institute – Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Republic of North Ossetia-Alania, Vladikavkaz, Russia

¹aovatulyan@sfedu.ru

²1079@list.ru

© Ватульян А.О., Нестеров С.А., 2022

Abstract. *The problem of bending a horizontally inhomogeneous piezoelectric cantilever beam is studied taking into account scale effects. The lower and upper surfaces of the beam are electroplated. Three types of loading are considered: load uniformly distributed along the length; transverse force at the other end of the beam; supply of electric potential to the upper electrode. The beam bending is modeled based on the Euler-Bernoulli hypotheses and the quadratic distribution of the electric potential. Based on the application of the variational principle of gradient electroelasticity, a system of differential equations of bending and electrostatics is obtained, as well as an extended range of boundary conditions. To find the bending moment and deflection of the middle line of a homogeneous beam, exact analytical expressions are obtained. In the case of an inhomogeneous beam at large values of the scale parameter, the solution is based on the shooting method. On specific examples, the calculations of moments and deflection are carried out, both in the case of a homogeneous and inhomogeneous beam. The influence of the mechanical and electrostatic gradient parameters, the electromechanical coupling coefficient, and the inhomogeneity parameter on the distribution of deflections has been clarified.*

Keywords: *Euler-Bernoulli beam, gradient theory of electroelasticity, size effect, inhomogeneous materials, shooting method, median line deflection, electric potential, electromechanical coupling coefficient*

Acknowledgments: *the study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, at the Southern Federal University.*

For citation: *Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Gradient Bending Model of Inhomogeneous Piezoelectric Beam. Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science. 2022;(4-1):10-20. (In Russ.).*

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Масштабно-зависимое поведение пьезоэлектрических структур привлекает в последние годы большое внимание ученых [1–8]. Это связано с широким применением микробалок в качестве сенсоров и акuatorов в микро- и наноэлектромеханических устройствах. Классическая механика не может описать экспериментальные факты, полученные при изгибе микроразмерных тел [9]. Описание масштабных эффектов возможно только на основе градиентной теории упругости [9] и электроупругости [3].

Задачи электроупругого изгиба балок и пластин хорошо изучены [10–13]. На основе вариационных принципов получены уравнения равновесия и граничные условия, предложены приближенные аналитические и численные методы решения поставленных задач. Однако в этих моделях не учитывались масштабные эффекты, которые возникают при деформации микроразмерных тел.

Для учета масштабных эффектов применяется градиентная теория упругости, которая получила свое развитие в середине XX в. в работах [14, 15]. На основе градиентной теории упругости и термоупругости исследованы масштабные эффекты, возникающие при деформировании как однородных [16, 17], так и функционально-градиентных [18–20] и составных тел [21–24]. Так, в работе [23] исследована градиентная модель изгиба составной балки Эйлера – Бернулли в предположении одноосного напряженного состояния. Для трех видов изгибающей нагрузки получены упрощенные асимптотические выражения для градиентных слагаемых при малых значениях масштабного параметра. Исследована зависимость скачка изгибающих моментов от модулей изгибной жесткости и масштабного параметра.

Однако в работах, исследующих изгиб и колебания неоднородной балки с учетом масштабных эффектов, материальные характеристики являются функциями поперечной координаты. Задача градиентной электроупругости об изгибе горизонтально неоднородной балки является неисследованной.

Цель данной работы – постановка задачи градиентной теории электроупругости для неоднородной балки при различных типах нагружения; получение аналитических выражений для нахождения изгибающих моментов и прогибов однородной балки; получение численного решения методом пристрелки для неоднородной балки; исследование влияния механического и электростатического градиентных параметров, коэффициента электромеханической связанности, параметра неоднородности на распределение прогибов и моментов; анализ полученных результатов.

Постановка задачи

В градиентной теории электроупругости плотность электрической энтальпии зависит не только от деформации и напряженности электрического поля, но и от их первых градиентов [7, 8]:

$$g(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij,k}, E_i, E_{i,j}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{kij} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} - \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} E_{i,j} E_{k,l}.$$

Здесь c_{ijkl} и A_{ijklmn} – компоненты тензоров модулей упругости 4-го и 6-го порядка; e_{kij} – компоненты тензора пьезомодулей 3-го порядка; ε_{ij} и α_{ijkl} – компоненты тензоров коэффициентов диэлектрической проницаемости 2-го и 4-го порядка соответственно.

Вводятся определяющие соотношения для компонент тензора напряжений Коши $\tau_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k$, тензора моментных напряжений $m_{ijk} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n}$, вектора электрической индукции $D_i = -\frac{\partial g}{\partial E_i} = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{ij} E_j$, тензора квадрупольного момента $Q_{ij} = -\frac{\partial g}{\partial E_{i,j}} = \alpha_{ijkl} E_{k,l}$.

Математическая постановка задачи градиентной электроупругости состоит из уравнений равновесия $\tau_{ij,j} - m_{ijk,jk} = 0$, уравнений электростатики $D_{i,i} - Q_{ij,ij} = 0$, статических граничных условий $m_{ijk,k} n_j n_k = r_i$, $\tau_{ij} n_j - m_{ijk,k} n_j - (m_{ijk,k} n_k)_{,j} + (m_{ijk,k} n_j n_k)_{,s} n_s = t_i$, кинематических граничных условий $u_i = v_i$, $u_{i,l} n_l = \frac{\partial v_i}{\partial n}$, электростатических граничных условий $Q_{ij} n_i n_j = 0$, $(D_j - Q_{jk,k}) n_j - (Q_{jk} n_k)_{,j} + (Q_{jk,k} n_k n_l)_{,l} n_j = q$ или $\psi = V_0$, $E_i n_i = 0$.

Здесь $S = S_u \cup S_t = S_\psi \cup S_q$ – поверхность тела; t_i , r_i – векторы заданных сил на поверхности тела; q – плотность поверхностного заряда; n_i – компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке.

В рамках градиентной модели электроупругости рассмотрим изгиб горизонтально неоднородной пьезоэлектрической кантилеверной балки длиной L и объемом $V = [0, L] \times S$, где $S = 2bh$ – площадь постоянного по длине поперечного сечения балки высотой $2h$ и шириной b . Ось x_1 направим по нейтральной линии балки, оси x_2 и x_3 совпадают с главными осями инерции балки. Балка поляризована вдоль оси Ox_3 , торцы не электродированы. На поверхности $x_3 = -h$ находится закороченный электрод, а на электрод, находящийся на поверхности $x_3 = +h$, подается электрический заряд ψ_0 . На балку действует один из трех видов механической нагрузки: 1) равномерно распределенная нагрузка p ; 2) на конце балки $x = L$ действует момент M_0 ; 3) на конце балки $x = L$ действует поперечная сила Q_0 . Ненулевые компоненты тензора модулей упругости, пьезомодулей и коэффициента диэлектрической проницаемости являются непрерывными функциями от координаты x_1 , т.е. $c_{11} = c_{11}(x_1)$, $e_{31} = e_{31}(x_1)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(x_1)$.

Уравнение изгиба электроупругой балки и граничные условия находятся путем применения вариационного принципа электроупругости. Для этого составляют выражение для полной энтальпии, которое для балки имеет вид

$$G = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h}^h (\tau_{11} \varepsilon_{11} + m_{111} \varepsilon_{11,1} - D_3 E_3 - Q_{33} E_{3,3}) dx_3 dx_1. \quad (1)$$

Для нахождения деформации $\varepsilon_{11} = u_{1,1}$ и напряженности электрического поля $E_3 = -\psi_{,3}$ примем кинематические гипотезы Эйлера – Бернулли [2] и гипотезу о распределении электрического потенциала [13]:

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 w'(x_1), \quad u_2 = 0, \quad u_3(x_1) = w(x_1), \quad \psi(x_1, x_3) = \frac{\psi_0 x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{h} + 1 \right) + \left(1 - \frac{x_3^2}{h^2} \right) \phi(x_1). \quad (2)$$

Здесь $w(x_1)$ и $\phi(x_1)$ – прогиб и электрический потенциал срединной линии балки соответственно, знак «штрих» обозначает производную по координате x_1 .

С учетом гипотез (2) ненулевые компоненты тензора деформации, напряжений Коши, моментных напряжений, вектора электрической индукции и квадрупольного момента примут вид

$$\varepsilon_{11} = -x_3 w'', \quad \tau_{11} = -c_{11}(x_1)x_3 w''(x_1) + \frac{e_{31}(x_1)}{h} \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{x_3 \psi_0}{h} - \frac{2x_3}{h} \phi(x_1) \right), \quad m_{111} = -l_1^2 x_3 (c_{11}(x_1) w''),$$

$$D_3 = -e_{31}(x_1)x_3 w''(x_1) - \frac{\varepsilon_3(x_1)}{h} \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{x_3 \psi_0}{h} - \frac{2x_3}{h} \phi(x_1) \right), \quad Q_{33} = l_2^2 \varepsilon_3 E_{3,3} = -\frac{l_2^2}{h^2} \varepsilon_3(x_1) (\psi_0 - 2\phi(x_1)).$$

Здесь l_1, l_2 – механический и электростатический градиентные параметры соответственно.

После нахождения вариации функционала (1) с учетом гипотез (2) и некоторых преобразований краевая задача изгиба пьезоэлектрической балки примет вид

$$M''(x_1) - M_h'''(x_1) + p = 0, \quad w(0) = w'(0) = 0, \quad M_h(0) = 0, \quad (3)$$

$$M_h(L) = 0, \quad M(L) - M_h'(L) = M_0 + \frac{I}{h^2} e_{31}(L) \psi_0, \quad M'(L) - M_h''(L) = Q_0.$$

Здесь $I = \frac{2bh^3}{3}$ – момент инерции балки; $M(x_1) = -\left(c_{11} I w'' + \frac{2}{h^2} e_{31} I \phi \right)$ – изгибающий момент; $M_h = -l_1^2 I (c_{11} w'')$ – градиентный момент.

При этом распределение электрического потенциала на нейтральной линии находится по формуле $\phi(x_1) = \frac{e_{31} h^2}{2\varepsilon_3 \left(1 + \frac{l_2^2 S}{I} \right)} w''$. С учетом этого изгибающий момент примет вид

$$M(x_1) = -I \left(c_{11} + \frac{e_{31}^2}{\varepsilon_3 \left(1 + \frac{l_2^2 S}{I} \right)} \right) w''.$$

Обезразмерим задачу (3) по формулам: $\xi = \frac{x_1}{L}, \quad \alpha_1 = \frac{l_1}{L}, \quad \alpha_2^2 = \frac{l_2^2 S}{I}, \quad W = \frac{w}{L}, \quad \bar{c}_{11} = \frac{c_{11}}{c_{11}^0}, \quad \bar{\varepsilon}_3 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3^0},$
 $\bar{e}_{31} = \frac{e_{31}}{e_{31}^0}, \quad m = \frac{ML}{c_{11}^0 I}, \quad P = \frac{pL^3}{c_{11}^0 I}, \quad m_1 = \frac{M_0 L}{c_{11}^0 I}, \quad m_2 = \frac{L}{h^2 c_{11}^0} e_{31}(L) \psi_0, \quad f_0 = \frac{Q_0 L^2}{c_{11}^0 I}, \quad m_h = \frac{M_h}{c_{11}^0 I}, \quad k_0^2 = \frac{(e_{31}^0)^2}{c_{11}^0 \varepsilon_3^0}.$

Здесь k_0 – коэффициент электромеханической связанности; $c_{11}^0, e_{31}^0, \varepsilon_3^0$ – некоторые характерные значения упругого модуля, пьезомодуля и коэффициента диэлектрической проницаемости соответственно.

Обезразмеренная краевая задача (3) примет вид

$$m''(\xi) - m_h'''(\xi) + P = 0, \quad W(0) = W'(0) = m_h(0) = 0, \quad (4)$$

$$m_h(1) = 0, \quad m(1) - m_h'(1) = m_1 + m_2, \quad m'(1) - m_h''(1) = f_0.$$

При этом

$$m(\xi) = -\left(\bar{c}_{11} + \frac{k_0^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\varepsilon}_3} \right) W''. \quad (5)$$

Аналитическое решение задачи в случае однородной балки

Если пьезоэлектрическая балка изготовлена из однородного материала, то задачу удобно решать в терминах изгибающего момента. После нахождения изгибающего момента, исходя из

выражения (5), определяется прогиб по формуле $W(\xi) = -\frac{1}{s} \int_0^\xi (\xi - \eta) m(\eta) d\eta, \quad s = 1 + \frac{k_0^2}{1 + \alpha_2^2}.$

Постановка задачи (4) в терминах изгибающего момента примет вид

$$m'' - \frac{\alpha_1^2}{s} m^{IV} + P = 0, \quad m'(0) = m'(1) = 0, \quad (6)$$

$$m(1) - \frac{\alpha_1^2}{s} m''(1) = m_1 + m_2, \quad m'(1) - \frac{\alpha_1^2}{s} m'''(1) = f_0.$$

В работе получено точное аналитическое решение задачи (6) при различных видах нагружения балки.

Пример 1. На балку с закороченными электродами действует только равномерно распределенная нагрузка P . Решение задачи (6) при $f_0 = m_1 = m_2 = 0$ в классической постановке ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) имеет вид $m_{clas} = -\frac{P}{2}(\xi - 1)^2$. В случае, если масштабные параметры α_1 и α_2 не

равны нулю, имеем $m_I = m_{clas} + P \frac{\alpha_1}{\sqrt{s}} e^{-\sqrt{s} \frac{\xi}{\alpha_1}} - P \frac{\alpha_1^2}{s}$.

Пример 2. На торец балки $\xi = 1$ действует только поперечная сила f_0 , при этом электроды закорочены. Решение задачи (6) при $P = m_1 = m_2 = 0$ имеет вид

$$m_{II} = m_{clas} + f_0 \frac{\alpha_1}{\sqrt{s}} \left(e^{-\sqrt{s} \frac{\xi}{\alpha_1}} - e^{\sqrt{s} \frac{(\xi-1)}{\alpha_1}} \right), \quad \text{где } m_{clas} = f_0(\xi - 1) - \text{решение задачи в классической}$$

постановке.

Пример 3. Нижний электрод закорочен, а на верхний подается электрический потенциал, при этом механическая нагрузка отсутствует. В этом случае, полагая в (6) $P = m_1 = f_0 = 0$, получим, что $m_{III} = m_{clas} = m_2$, т.е. решение задачи в градиентной постановке совпадает с решением в классической постановке [8].

Решение задачи в случае неоднородной балки методом пристрелки

В случае, если балка изготовлена из неоднородных материалов, задачу удобно решать при ее постановке в терминах прогиба. Рассмотрим постановку задачи:

$$-\left(\left(\bar{c}_{11} + \frac{k_0^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\vartheta}_3} \right) W'' \right)'' + \alpha_1^2 (\bar{c}_{11} W'')^{IV} + P = 0, \quad W(0) = W'(0) = (\bar{c}_{11} W')'(0) = 0,$$

$$(\bar{c}_{11} W')'(1) = 0, \quad -\left(\bar{c}_{11}(1) + \frac{k_0^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{\bar{e}_{31}^2(1)}{\bar{\vartheta}_3(1)} \right) W''(1) + \alpha_1^2 (\bar{c}_{11} W'')''(1) = m_1 + m_2, \quad (7)$$

$$-\left(\left(\bar{c}_{11}(1) + \frac{k_0^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{\bar{e}_{31}^2(1)}{\bar{\vartheta}_3(1)} \right) W''(1) \right)' + \alpha_1^2 (\bar{c}_{11} W'')'''(1) = f_0.$$

Задача (7) при произвольных законах неоднородности электроупругих характеристик может быть решена только численно, например методом пристрелки, как в [25, 26].

Введем следующие обозначения: $U_1 = W$, $U_2 = W'$, $U_3 = -\bar{c}_{11}(\xi)W''$, $U_4 = -\alpha^2(\bar{c}_{11}(\xi)W'')'$, $U_5 = -\left(\bar{c}_{11} + \frac{k_0^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\vartheta}_3} \right) W'' + \alpha_1^2 (\bar{c}_{11} W'')''$, $U_6 = U_5'$, $U_6' = -P$. Тогда после некоторых преобразований получим каноническую систему ОДУ 1-го порядка, а также граничные условия:

$$U_1' = U_2, \quad U_2' = -\frac{U_3}{\bar{c}_{11}(\xi)}, \quad U_3' = \frac{U_4}{\alpha_1^2}, \quad U_4' = U_3 \left(1 + \frac{k_0^2}{1 + \alpha_2^2} \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{c}_{11} \bar{\vartheta}_3} \right) - U_5, \quad U_5' = U_6, \quad U_6' = -P. \quad (8)$$

$$U_1(0) = U_2(0) = U_4(0) = 0, \quad U_4(1) = 0, \quad U_5(1) = m_1 + m_2, \quad U_6(1) = f_0. \quad (9)$$

Решение задачи (8), (9) представим в виде суммы решений неоднородной задачи Коши (8) с нулевыми начальными условиями на торце $\xi = 0$, т.е. $U_1^0(0) = 0, U_2^0(0) = 0, U_3^0(0) = 0, U_4^0(0) = 0, U_5^0(0) = 0, U_6^0(0) = 0$ и однородных задач Коши с ненулевыми начальными условиями. Сформулируем начальные условия на торце $\xi = 0$ трех вспомогательных задач Коши:

$$\begin{aligned} U_1^I(0) = 0, U_2^I(0) = 0, U_3^0(0) = 1, U_4^I(0) = 0, U_5^I(0) = 0, U_6^I(0) = 0, \\ U_1^{II}(0) = 0, U_2^{II}(0) = 0, U_3^{II}(0) = 0, U_4^{II}(0) = 0, U_5^{II}(0) = 1, U_6^{II}(0) = 0, \\ U_1^{III}(0) = 0, U_2^{III}(0) = 0, U_3^{III}(0) = 0, U_4^{III}(0) = 0, U_5^{III}(0) = 0, U_6^{III}(0) = 1. \end{aligned}$$

Решение задачи (8), (9) ищем в виде линейной комбинации $U_i = U_i^0 + p_1 U_i^I + p_2 U_i^{II} + p_3 U_i^{III}$, $i = 1, \dots, 6$. Постоянные p_1, p_2, p_3 определяются из граничных условий при $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} U_4(1) = U_4^0(1) + p_1 U_4^I(1) + p_2 U_4^{II}(1) + p_3 U_4^{III}(1) = 0, \\ U_5(1) = U_5^0(1) + p_1 U_5^I(1) + p_2 U_5^{II}(1) + p_3 U_5^{III}(1) = m_1 + m_2, \\ U_6(1) = U_6^0(1) + p_1 U_6^I(1) + p_2 U_6^{II}(1) + p_3 U_6^{III}(1) = f_0. \end{aligned}$$

Результаты вычислений

В первой серии вычислений рассматривалась однородная балка. На рис. 1, 2 сплошной линией показано распределение моментов и прогибов по координате ξ при решении задачи в классической постановке, точками – в градиентной постановке при $\alpha_1 = 0,1, \alpha_2 = 0, k_0 = 0,5$. При этом на рис. 1 изображено распределение функций в случае равномерно распределенной нагрузки $P=1$, на рис. 2 – в случае действия на торец балки $\xi = 1$ поперечной силы $f_0=1$. На рис. 3 изображена зависимость прогиба от механического масштабного параметра при действии поперечной силы.

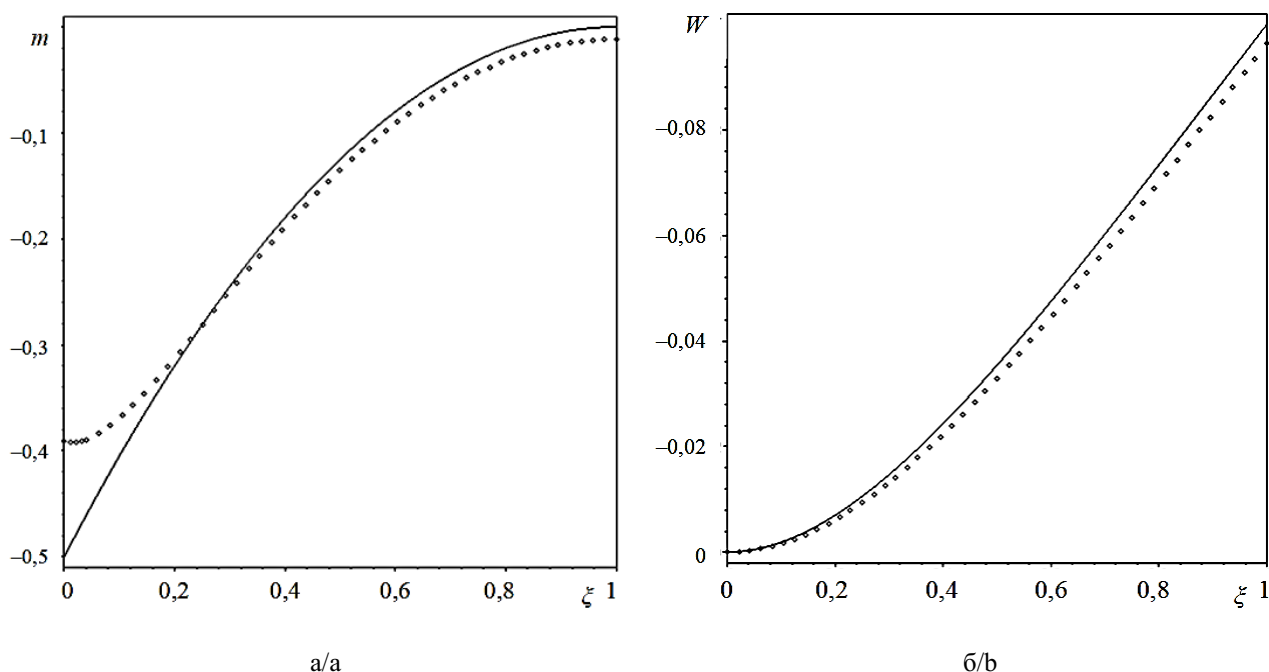


Рис. 1. Графики распределения по координате ξ : а – моментов; б – прогибов в случае равномерно распределенной поперечной нагрузки / Fig. 1. Coordinate distribution graphs: a - moments; b - deflections in the case of a uniformly distributed transverse load

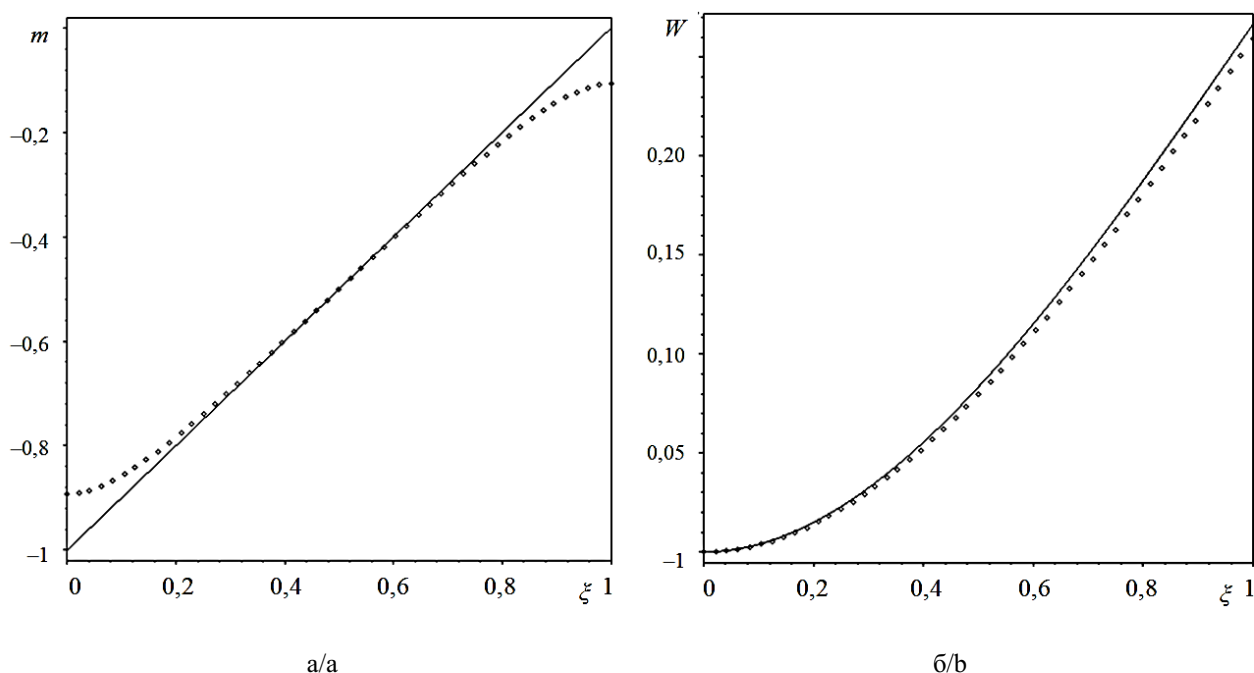


Рис. 2. Графики распределения по координате ξ : а – моментов; б – прогибов в случае действия на торец балки $\xi = 1$ поперечной силы / Fig. 2. Coordinate distribution graphs : a - moments; b - deflections in the case of a transverse force acting on the end $\xi = 1$ of the beam

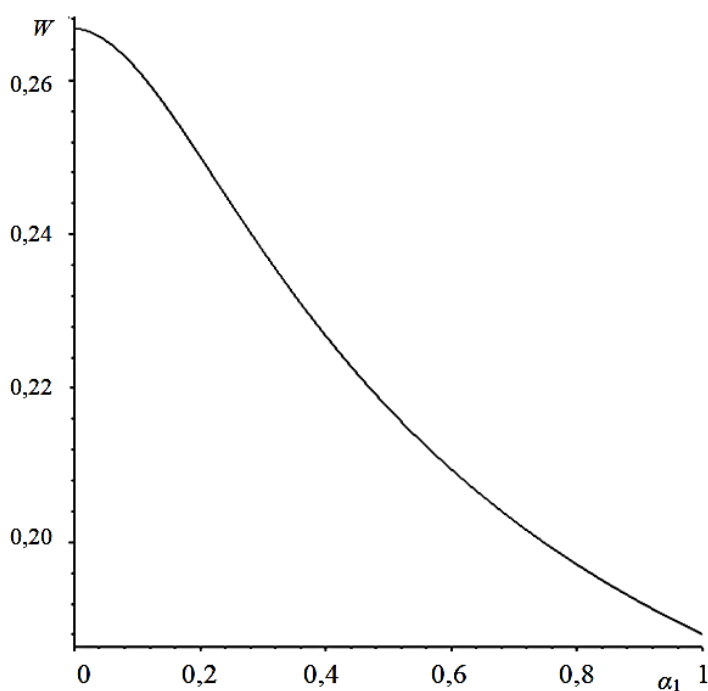


Рис. 3. График зависимости прогиба от механического масштабного параметра в случае действия на торец балки $\xi = 1$ поперечной силы / Fig. 3. Graphs of the dependence of the deflection on the mechanical scale parameter in the case of a transverse force acting on the end $\xi = 1$ of the beam

На рис. 4 для случая подачи на верхний электрод потенциала изображена зависимость прогиба от электростатического масштабного параметра α_2 (рис. 4а) и от коэффициента электромеханической связи k_0 (рис. 4б).

Из рис. 1–4 следует, что увеличение масштабных параметров α_1 и α_2 приводит к уменьшению прогиба, а увеличение коэффициента электромеханической связанности – к его увеличению.

Во второй серии проводились вычисления методом пристрелки для горизонтально неоднородной балки. Проведена верификация решения методом пристрелки в случае однородной балки для всех типов нагрузки путем сравнения с аналитическими решениями для прогибов. Выяснено, что устойчивые решения с погрешностью менее 1 % можно получить при механическом масштабном параметре больше 0,07.

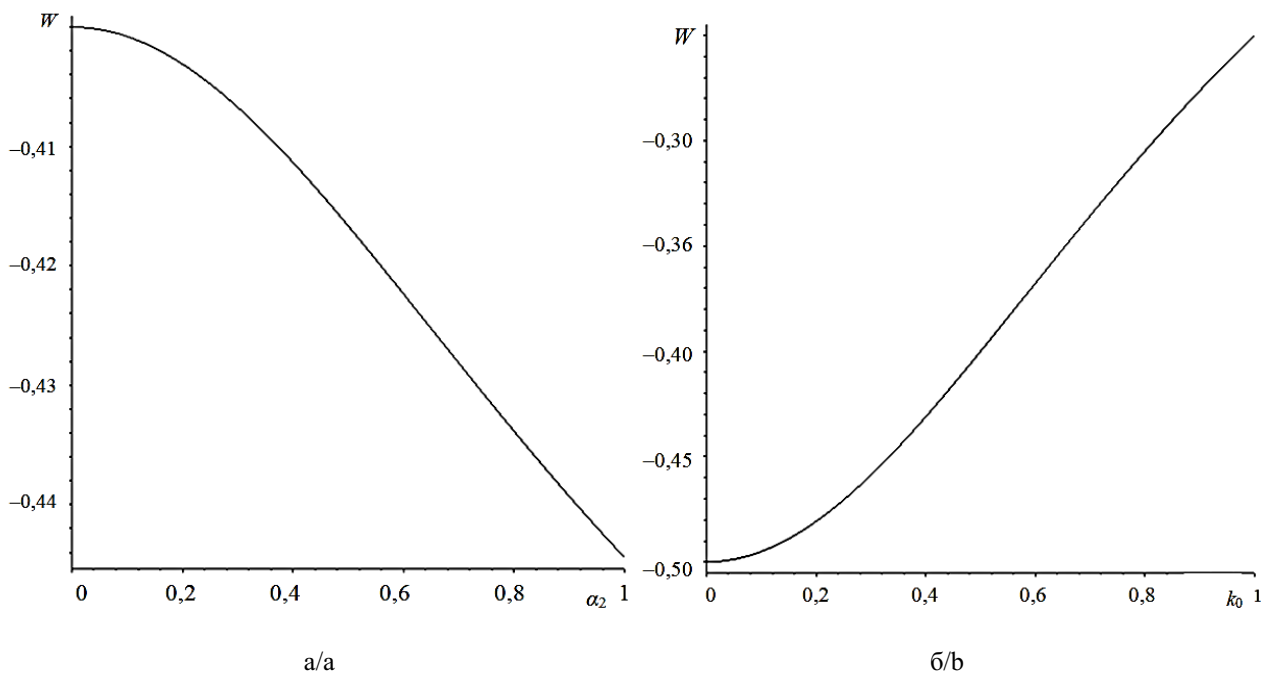


Рис. 4. Графики зависимости прогиба: а – от электростатического масштабного параметра; б – коэффициента электромеханической связи / Fig. 4. Graphs of the dependence of the deflection: a - on the electrostatic scale parameter; b - the coefficient of electromechanical coupling

Полагаем, что материалом неоднородной балки является функционально-градиентный, полученный путем перемешивания пьезокерамик PZT-4 и PZT-5Н, материал. Законы неоднородности, найденные по «правилу смеси» [18], в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11}(\xi) &= 1 - 0,26\xi^N, \\ \bar{e}_{31}(\xi) &= 1 - 0,34\xi^N, \\ \bar{\epsilon}_3(\xi) &= 0,39 + 0,61\xi^N, \quad N=1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Исследовано влияние параметра неоднородности N в законах (10) на распределение прогибов в случае действия на балку поперечной нагрузки $f_0=1$, действующей на торец балки $\xi=1$. На рис. 5 сплошной линией показан график распределения прогибов при $N=1$, точками – при $N=3$. В расчетах принято: $k_0=0,3$, $\alpha_1=0,2$, $\alpha_2=0,1$.

Из рис. 5 следует, что степенные законы с разными показателями неоднородности оказывают большое влияние на распределение прогибов.

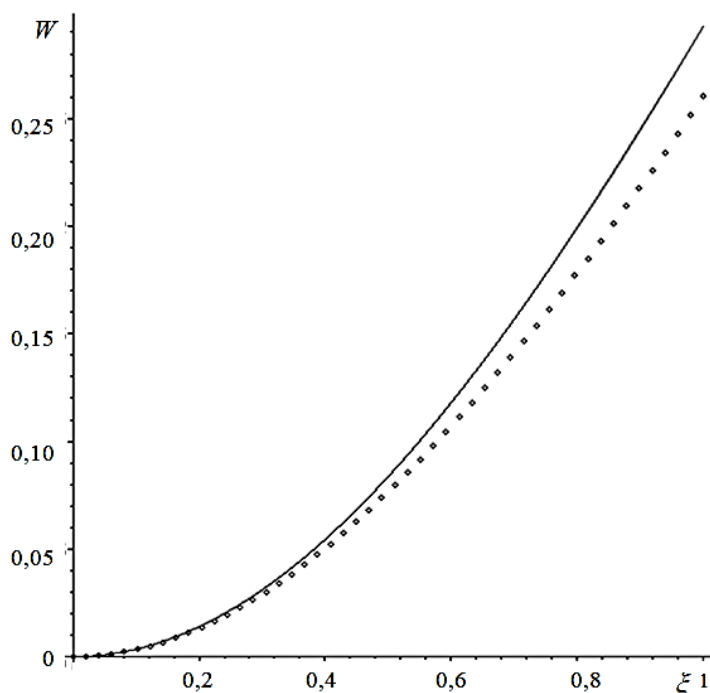


Рис. 5. Распределение по координате ξ прогибов при разных значениях параметра неоднородности N / Fig. 5. Distribution of deflections along the coordinate ξ at different values of the inhomogeneity parameter N

Заключение

В рамках модели Эйлера – Бернулли исследована задача об изгибе пьезоэлектрической балки. Показано отличие распределений моментов и прогибов по горизонтальной координате, рассчитанных по классической теории и по градиентной теории электроупругости. В случае однородной балки для каждого вида нагрузки получены точные аналитические выражения для нахождения изгибающего момента и прогиба срединной линии. В случае неоднородной балки при больших значениях масштабного параметра решение построено на основе метода пристрелки. Выяснено, что увеличение значения масштабных параметров снижает значения прогибов, а увеличение параметра связанности – повышает их. Исследовано влияние параметра неоднородности в степенном законе, моделирующем электромеханические характеристики балки, на распределение прогибов по горизонтальной координате.

Список источников

1. *Liang X., Shen S.* Size-dependent piezoelectricity and elasticity due to the electric field-strain gradient coupling and strain gradient elasticity // *Int. J. Appl. Mech.* 2003. Vol. 5 (2). P. 1350–1365.
2. *Liang X., Hu S., Shen S.* Bernoulli-Euler dielectric beam model based on strain-gradient effect // *J. Appl. Mech.* 2013. Vol. 80 (4). <https://doi.org/10.1115/1.4023022>.
3. *Hadjesfandiari A.R.* Size-dependent piezoelectricity // *Int. J. Solids Struct.* 2013. Vol. 50 (18). P. 2781–2791.
4. *Yue Y., Xu K., Aifantis E.C.* Strain gradient and electric field gradient effects in piezoelectric cantilever beams // *J. Mech. Behav. Mater.* 2015. Vol. 24 (3–4). P. 121–127.
5. *Iesan D.A.* Theory of thermopiezoelectricity with strain gradient and electric field gradient effects // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2018. Vol. 67. P. 280–290.
6. *Arvanitakis A.* Gradient effects in a new class of electro-elastic bodies // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.* 2018. Vol. 69 (3). <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0959-0>.
7. *Solyaev Yu., Lurie S.* Pure bending of the piezoelectric layer in second gradient electroelasticity theory // *Acta Mech.* 2019. Vol. 230. P. 4197–4211.
8. *Lurie S., Solyaev Yu.* On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2019. Vol. 31. P. 1601–1613. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-050781-3>.
9. *Lam D.C., Yang F., Chong A., Wang J., Tong P.* Experiments and theory in strain gradient elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 2003. Vol. 51 (8). P. 1477–1508.
10. *Ватulyян А.О., Гетман И.П., Лапицкая Н.Б.* Об изгибе пьезоэлектрической биморфной пластины // *Прикладная механика.* 1991. Т. 27 (10). С. 101–105.
11. *Krommer M., Irschik H.* An electromechanically coupled theory for piezoelectric beams taking into account the charge equation of electrostatics // *Acta Mech.* 2002. Vol. 154 (1–4). P. 141–158.
12. *Yang J.A.* Review of a few topics in piezoelectricity // *Appl. Mech. Rev.* 2006. Vol. 59 (6). P. 335–345. <https://doi.org/10.1115/1.2345378>.
13. *Soloviev A.N., Chebanenko V.A., Parinov I.A., Oganesyanyan P.A.* Applied theory of bending vibrations of a piezoelectric bimorph with a quadratic electric potential distribution // *Materials Physics and Mechanics.* 2019. Vol. 42 (1). P. 65–73.
14. *Toupin R.A.* Elastic materials with couple-stresses // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. P. 385–414.
15. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964. Vol. 16. P. 51–78.
16. *Aifantis E.C.* Gradient effects at the macro, micro and nano scales // *JMBM.* 1994. Vol. 5. P. 335–353.
17. *Ломакин Е.В., Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О.* Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах теории упругости за счет градиентных эффектов // *Докл. РАН.* 2019. Т. 489, № 6. С. 585–591.
18. *Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaiyan M.H., Rahaeifard M.* On the size dependent behavior of functionally graded micro-beams // *Mater. Des.* 2010. Vol. 31. P. 2324–2333.
19. *Kahrobaiyan M.H., Rahaeifard M., Tajalli S.A., Ahmadian M.T.* A strain gradient functionally graded Euler-Bernoulli beam formulation // *Int. J. Eng. Sci.* 2012. Vol. 52. P. 65–76.
20. *Momeni S.A., Asghari M.* The second strain gradient functionally graded beam formulation // *Composite Structures.* 2018. Vol. 188. P. 15–24.

21. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity // *Materials Physics Mechanics*. 2020. Vol. 46. P. 27–41.
22. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Уч. зап. Казан. ун-та. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 163, кн. 2. С. 181–196.
23. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Градиентная модель изгиба составной балки // Экол. вестн. научн. центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19, № 2. С. 6–16.
24. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Modeling of thermoelastic deformation of a thin-layer “coating-substrate” system // *J. of Physics: Conference Series*. 2022. Vol. 2317, art. № 012012. P. 1–9. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2317/1/012012>.
25. Ватульян А.О., Варченко А.А. Исследование колебаний балки из функционально-градиентного материала с учетом затухания // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2021. № 4. С. 10–18.
26. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to numerical analysis. Springer, 2002. 746 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21738-3>.

References

1. Liang X., Shen S. Size-dependent piezoelectricity and elasticity due to the electric field-strain gradient coupling and strain gradient elasticity. *Int. J. Appl. Mech.* 2003;5(2):1350-1365.
2. Liang X., Hu S., Shen S. Bernoulli-Euler dielectric beam model based on strain-gradient effect. *J. Appl. Mech.* 2013;80(4), <https://doi.org/10.1115/1.4023022>.
3. Hadjesfandiari A.R. Size-dependent piezoelectricity. *Int. J. Solids Struct.* 2013;50(18):2781-2791.
4. Yue Y., Xu K., Aifantis E.C. Strain gradient and electric field gradient effects in piezoelectric cantilever beams. *J. Mech. Behav. Mater.* 2015;24(3-4):121-127.
5. Iesan D.A. Theory of thermopiezoelectricity with strain gradient and electric field gradient effects. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2018;67:280-290.
6. Arvanitakis A. Gradient effects in a new class of electro-elastic bodies. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2018;69(3), <https://doi.org/10.1007/s00033-018-0959-0>.
7. Solyaev Yu., Lurie S. Pure bending of the piezoelectric layer in second gradient electroelasticity theory. *Acta Mech.* 2019;230:4197-4211.
8. Lurie S., Solyaev Yu. On the formulation of elastic and electroelastic gradient beam theories. *Continuum Mech. Thermodyn.* 2019;31:1601-1613, <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00781-3>.
9. Lam D.C., Yang F., Chong A., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*. 2003;51(8):1477-1508.
10. Vatul'yan A.O., Getman I.P., Lapitskaya N.B. Flexure of a piezoelectric bimorphic plate. *Soviet Applied Mechanics*. 1991;27(10):1016-1019, doi: 10.1007/BF00887512.
11. Krommer M., Irschik H. An electromechanically coupled theory for piezoelastic beams taking into account the charge equation of electrostatics. *Acta Mech.* 2002;154(1-4):141-158.
12. Yang J.A. Review of a few topics in piezoelectricity. *Appl. Mech. Rev.* 2006;59(6):335-345, <https://doi.org/10.1115/1.2345378>.
13. Soloviev A.N., Chebanenko V.A., Parinov I.A., Oganessian P.A. Applied theory of bending vibrations of a piezoelectric bimorph with a quadratic electric potential distribution. *Materials Physics and Mechanics*. 2019;42(1):65-73.
14. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1962;11:385-414.
15. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964;16:51-78.
16. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales. *JMBM*. 1994;5:335-353.
17. Lomakin E.V., Lurie S.A., Rabinskiy L.N., Solyaev Yu.O. Refined stress analysis in applied elasticity problems accounting for gradient effects. *Doklady Physics*. 2019;64(12):482-486.
18. Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaiyan M.H., Rahaeifard M. On the size dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Mater. Des.* 2010;31:2324-2333.
19. Kahrobaiyan M.H., Rahaeifard M., Tajalli S.A., Ahmadian M.T. A strain gradient functionally graded Euler-Bernoulli beam formulation. *Int. J. Eng. Sci.* 2012;52:65-76.
20. Momeni S.A., Asghari M. The second strain gradient functionally graded beam formulation. *Composite Structures*. 2018;188:15-24.
21. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity. *Materials Physics Mechanics*. 2020;46:27-41.
22. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Solution of the problem of gradient thermoelasticity for a coated strip. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki = Scientific Notes of Kazan University. Series of Physical and Mathematical Sciences*. 2021;163(2):181-196. (In Russ.).

23. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. Gradient model of bending of a composite beam. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2022;19(2):6-16. (In Russ.).

24. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Modeling of thermoelastic deformation of a thin-layer “coating-substrate” system. *J. of Physics: Conference Series*. 2022;2317(012012):1-9, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2317/1/012012>.

25. Vatulyan A.O., Varchenko A.A. Investigation of Vibrations of a Beam Made of a Functionally Graded Material Taking into Account Attenuation. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2021;(4):10-18. (In Russ.)

26. Stoer J., Bulirsch R. *Introduction to numerical analysis*. Springer; 2002. 746 p., <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21738-3>.

Информация об авторах

А.О. Ватulyян – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

С.А. Нестеров – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН.

Information about the authors

A.O. Vatulyan - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

S.A. Nesterov - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Department of Differential Equations, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Science.

Статья поступила в редакцию 02.08.2022; одобрена после рецензирования 18.08.2022; принята к публикации 15.11.2022.

The article was submitted 02.08.2022; approved after reviewing 18.08.2022; accepted for publication 15.11.2022.

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-21-28

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕПОЛНОГО РЫНКА ПОЛНЫМ ДЛЯ ТРИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ КВАНТИЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ

Ирина Александровна Землякова

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

izemlyakova@sfnu.ru

Аннотация. Рассматривается переход от неполного рынка к полному с помощью хааровской интерполирующей фильтрации. При этом в случае перехода от текущего уровня дерева к последующему происходит дробление на две части лишь одного атома, остальные атомы не подвергаются изменениям. В ходе осуществления данной интерполяции возникает полный рынок, для которого мартигальная мера уже единственна. Возникает вопрос, связанный с выбором единственной мартигальной меры для получившегося полного рынка. В качестве данной меры выбирается одна из крайних мартигальных мер, расстояние от которой до рыночной будет наименьшим. Инструментом для определения меры удалённости крайней мартигальной меры от рыночной выбирается расстояние Кульбака – Лейблера. Строится решение задачи квантильного хеджирования для полученного в ходе интерполяции полного рынка. Данное решение основано на теории двойственности линейного программирования. Продолжается исследование задачи квантильного хеджирования для триномиальной модели. Предложен вычислительный эксперимент, в ходе которого происходит переход от неполного рынка к полному и решается задача квантильного хеджирования для получившегося полного рынка. Получен вывод о возможности сведения триномиальной модели к биномиальной.

Ключевые слова: хааровская интерполирующая фильтрация, хеджирование, квантильное хеджирование, неполный рынок, полный рынок, биномиальная модель, триномиальная модель, расстояние Кульбака – Лейблера

Для цитирования: Землякова И.А. Интерполяция неполного рынка полным для триномиальной модели в задаче квантильного хеджирования // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 21–28.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

INTERPOLATION OF AN INCOMPLETE MARKET BY A COMPLETE ONE FOR A TRINOMIAL MODEL IN THE QUANTILE HEDGING PROBLEM

Irina A. Zemlyakova

Southen Federal University, Rostov-on-Don, Russia

izemlyakova@sfnu.ru

© Землякова И.А., 2022

Abstract. *The transition from an incomplete market to a complete market is considered using Haar interpolating filtering. With Haar interpolation, in the case of a transition from the current level of the tree to the next, only one atom is split into two parts, while the remaining atoms do not change. In the course of this interpolation, a complete market arises, for which the martingale measure is already unique. The question arises related to the choice of a single martingale measure for the resulting complete market. As this measure, one of the extreme martingale measures is chosen, the distance from which to the market measure will be the smallest. The Kullback-Leibler distance is chosen as a tool for determining the measure of distance of the extreme martingale measure from the market one. A solution to the quantile hedging problem is constructed for the full market obtained in the course of interpolation. This solution is based on the duality theory of linear programming. The study of the problem of quantile hedging for the trinomial model continues. A computational experiment is proposed, during which there is a transition from an incomplete market to a complete one and the problem of quantile hedging is solved for the resulting complete market. The conclusion about the possibility of reducing the trinomial model to the binomial one is obtained.*

Keywords: *Haar interpolating filtering, hedging, quantile hedging, incomplete market, full market, binomial model, trinomial model, Kullback-Leibler distance*

For citation: Zemlyakova I.A. Interpolation of an Incomplete Market by a Complete One for a Trinomial Model in the Quantile Hedging Problem. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):21-28. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Проблема ценообразования и хеджирования платёжных обязательств хорошо понимается в контексте безарбитражных моделей, которые являются полными. В данной статье показано, как неполные рынки можно расширить до полных, используя хааровскую интерполяцию финансовых рынков, и применить это при решении задачи квантильного хеджирования в рамках триномиальной модели. Техника расширения неполных рынков до полных с помощью хааровской интерполирующей фильтрации (ХИФ) использовалась в работах [1–5].

Статья построена следующим образом. Рассматривается ХИФ и описывается процесс интерполяции. Вводится понятие расстояния Кульбака – Лейблера, с помощью которого выбирается единственная мартингальная мера полного рынка. Приводится решение задачи квантильного хеджирования в случае полного рынка. Рассматривается пример, вычислительный эксперимент для триномиальной модели, для которой реализуется переход от неполного рынка к полному, выбирается единственная мартингальная мера (с использованием расстояния Кульбака – Лейблера) и приводится решение задачи квантильного хеджирования для полученного полного рынка.

Хааровская интерполяция

Пусть (Ω, F) – измеримое пространство с конечной σ -алгеброй F . Рассмотрим (B, S) -рынок, состоящий из рискованного актива $S = (S_k)_{k=0}^N$ и детерминированного банковского счёта $B = (B_k)_{k=0}^N$. Произведём дисконтирование, т.е. перейдём к рассмотрению рынка $(1, Z)$, где $Z = (Z_k)_{k=0}^N = \left(\frac{S_k}{B_k}\right)_{k=0}^N$, а $B \equiv 1$. Из полноты дисконтированного рынка делаем вывод о полноте исходного.

При хааровской интерполяции в случае перехода от текущего уровня дерева к последующему происходит дробление на две части лишь одного атома, остальные атомы не подвергаются изменениям.

То есть для интерполяции неполного рынка до рынка, обладающего свойством полноты, по Хаару, следует произвести дисконтирование исходного финансового рынка, построить ХИФ H фильтрации F и интерполяцию Y процесса Z , при которых рынок $(1, Y)$ становится полным.

Введём в рассмотрение хааровскую фильтрацию $H = (H_n)_{n=0}^L$, где $H_0 = F_0$, $H_L = F$. Её особенностью является следующее свойство: для любого n σ -алгебра H_n порождается разбиением Ω точно на $(n + 1)$ атом.

Это означает, что в фильтрации при переходе от текущего уровня дерева к следующему делится на две части лишь один атом, который был получен в результате дробления, все остальные атомы, как было отмечено ранее, остаются неизменными. Это специальная хааровская фильтрация (рис. 1).

Определение 1 [4, с. 144]. Хааровскую фильтрацию H назовём ХИФ фильтрации F , если существует последовательность натуральных чисел $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_N = L$ такая, что $H_{n_k} = F_k$ ($0 \leq k \leq N$). Процесс $Y = (Y_n, H_n)_{n=0}^L$ назовём хааровской интерполяцией процесса $Z = (Z_k, F_k)_{k=0}^N$ относительно хааровской фильтрации H , если $Y_{n_k} = Z_k \forall k$ ($0 \leq k \leq N$).

Обратимся к примеру, который был рассмотрен в [1]. Изобразим графически двухшаговую тринomialную модель.

ХИФ для данной модели будет иметь вид, представленный на рис. 2.

В данном дереве $n = 0, 1, \dots, 8$, причем $n_0 = 0, n_1 = 2, n_2 = 8$.

Определим финансовый (\tilde{B}, \tilde{S}) -рынок: $\tilde{B}_n = B_k, n_k < n < n_{k+1}, 0 \leq k < N, \tilde{B}_L = B_N, \tilde{S}_n = \tilde{B}_n Y_n, 0 \leq n \leq L$.

При $n = n_k$ имеем $\tilde{B}_n = B_k, \tilde{S}_n = S_k$, т.е. можно сделать вывод об интерполяции исходного (B, S) -рынка (\tilde{B}, \tilde{S}) -рынком.

Определение 2 [4, с. 144]. Будем говорить, что мартингальная мера $P \in P(Z, F)$ удовлетворяет свойству хааровской единственности, если для фильтрации F можно построить такую хааровскую интерполяцию H , что для соответствующей мартингальной интерполяции $Y = (Y_n, H_n)_{n=0}^L$ имеет место соотношение $|P(Y, H)| = 1$.

Продолжим рассмотрение примера [1]. Как было показано, для него множество мартингальных мер – непустое. Можно выбрать любую мартингальную меру P^* из этого множества и построить соответствующую мартингальную интерполяцию (Y, H) . Естественно, что выбранная мера будет принадлежать множеству мартингальных мер $P(Y, H)$. Рассмотрим более подробно фильтрацию $H_n = \sigma(A_{n,0}, A_{n,1}, \dots, A_{n,n}), H_0 = \sigma(A_{0,0} = \Omega)$, представленную на рис. 2. Для атомов фильтрации справедливы следующие равенства: $A_{n,0} = A_{n+1,0} \cup A_{n+1,1}, A_{n,i} = A_{n+1,i+1}, i = 1, 2, \dots, n + 1$.

Для мартингальной интерполяции процесс Y определяется равенствами $Y(A_{n,i}) = Y(A_{n+1,i+1}), i = 1, 2, \dots, n, Y(A_{n,0}) = \frac{Y(A_{n+1,0})P^*(A_{n+1,0}) + Y(A_{n+1,1})P^*(A_{n+1,1})}{P^*(A_{n,0})}$.

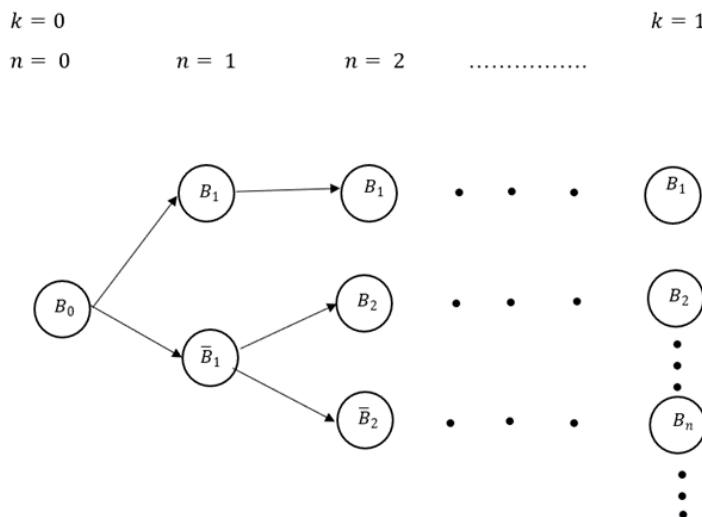


Рис. 1. Модель интерполяции исходного рынка / Fig. 1. Interpolation model of the original market

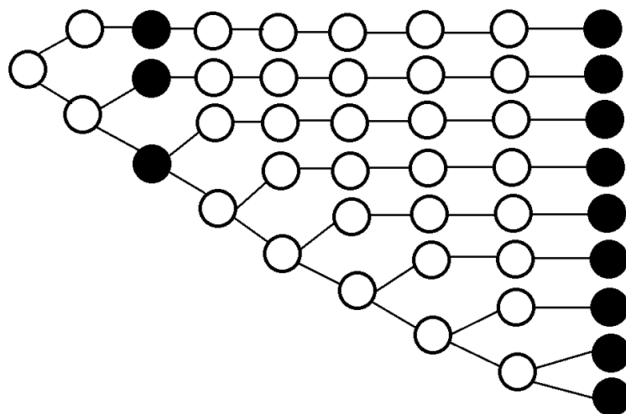


Рис. 2. ХИФ для двухшаговой тринomialной модели. Закрашены атомы совпадающих σ -подалгебра / Fig. 2. Haar interpolating filtering for a two-step trinomial model. The atoms of the coinciding σ -subalgebras are shaded

Эти соотношения однозначно определяют мартингалную интерполяцию. Итак, пусть задана мартингалная интерполяция.

Таким образом, выбрав любую из данных мартингалных мер, можно построить интерполирующий $(1, Y)$ -рынок, полученный из исходного с помощью хааровской мартингалной интерполяции относительно данной меры. Выбранная мартингалная мера будет являться единственной мартингалной мерой построенного рынка.

Выбор единственной мартингалной меры

Естественным образом возникает вопрос о выборе наилучшей меры, т.е. такой мартингалной меры, для которой решение задачи квантильного хеджирования для построенного интерполирующего $(1, Y)$ -рынка будет максимально приближено к решению данной задачи для исходного неполного рынка.

В качестве данной меры будет выступать мартингалная мера P^* , расстояние от которой до рыночной меры Q будет наименьшим. Инструментом для определения удалённости крайней мартингалной меры от рыночной выберем расстояние Кульбака – Лейблера $D_{KL}(P^*||Q)$. Оно представляет собой неотрицательный функционал, который является несимметричной мерой удалённости друг от друга двух вероятностных распределений, определённых на общем пространстве элементарных событий. Так как распределения P^* и Q дискретны, то расхождение Кульбака – Лейблера распределения P^* относительно Q будем определять по следующей формуле [6]: $D_{KL}(P^*||Q) = \sum_{i=1}^n p_i^* \ln \frac{p_i^*}{q_i}$ ($n = 3^N$).

Вернёмся к примеру [1]. Пусть исходная вероятность Q такова, что ρ_n одинаково распределены и независимы. Вероятности $Q(\rho_n = a_1) = p, Q(\rho_n = a_2) = q, Q(\rho_n = a_3) = r$. В этом случае распределение вероятностей на множестве различных значений S_3 – триномиальное распределение $Q(k_1, k_2, k_3) = \frac{3!}{k_1!k_2!k_3!} p^{k_1} q^{k_2} r^{k_3}$.

Положим $p = 0,5, q = 0,3, r = 0,2$.

Вероятности обхода для рыночной меры (Q):

0,008 0,027 0,125 0,036 0,054 0,06 0,135 0,18 0,225 0,15.

Крайние мартингалные меры задаём с помощью кортежей. Например, рассмотрим вероятности обхода для кортежа $\langle 1, 2, 2 \rangle$ (табл. 1).

Рассчитаем для каждой из восьми мартингалных мер расстояние Кульбака – Лейблера относительно рыночной меры Q . Расчёты приведены в табл. 2.

Таблица 1 / Table 1

Таблица 2 / Table 2

Вероятности обхода для кортежа $\langle 1, 2, 2 \rangle$
 / Probabilities of circumvention
 for the tuple $\langle 1, 2, 2 \rangle$

$\bar{\Omega}$	k1	k2	k3	$R\langle 1, 2, 2 \rangle$
A1	0	0	3	0
A2	0	3	0	0
A3	3	0	0	$p_1 p_2^2$
A4	0	1	2	$q_1 r_2^2$
A5	0	2	1	0
A6	1	0	2	$p_1 r_2^2$
A7	1	2	0	0
A8	1	1	1	$2q_1 p_2 r_2$
A9	2	1	0	$q_1 p_2^2$
A10	2	0	1	$2p_1 p_2 r_2$

Расстояние Кульбака – Лейблера для крайних мартингалных мер относительно рыночной меры Q / Kullback-Leibler distance for extreme martingale measures relative to the market measure Q

Кортеж, задающий крайнюю мартингалную меру	Расстояние Кульбака – Лейблера относительно рыночной меры Q
$\langle 1, 1, 1 \rangle$	0,6694318001
$\langle 1, 1, 2 \rangle$	0,2531214556
$\langle 1, 2, 1 \rangle$	0,2531214556
$\langle 1, 2, 2 \rangle$	0,3730621789
$\langle 2, 1, 1 \rangle$	0,2531214556
$\langle 2, 1, 2 \rangle$	0,3730621789
$\langle 2, 2, 1 \rangle$	0,3730621789
$\langle 2, 2, 2 \rangle$	1,155424823

Таким образом, в качестве единственной мартингальной меры полного рынка можно выбрать одну из крайних мартингальных мер, задаваемых кортежами $\langle 1,1,2 \rangle$, $\langle 1,2,1 \rangle$, $\langle 2,1,1 \rangle$.

То есть от решения задачи квантильного хеджирования на неполном рынке перешли к решению задачи квантильного хеджирования на полном рынке [7].

Задача квантильного хеджирования в случае полного рынка

Полнота означает, что существует совершенный хедж, т.е. предсказуемый процесс γ^* и существует C^* такое, что $X_N^{\gamma^*} = C^* + \sum_{i=1}^N \gamma_i^* \Delta S_i$, $X_N^{\gamma^*} = f$.

Пусть для начального капитала выполняется неравенство $U_0 \leq \alpha C^*$, $0 < \alpha < 1$.

Таким образом, получим $X_N^\gamma = U_0 + \sum_{i=1}^N \gamma_i \Delta S_i$.

Задача квантильного хеджирования на полном рынке: $\max p(A)$ при ограничении $g(A) \leq \alpha$, где $g(d\omega) = \frac{f(\omega)}{C^*} p^*(d\omega)$, $A = \{\omega: X_N \geq f\}$ – множество успешного хеджирования.

Решение данной задачи можно попытаться найти с помощью леммы Неймана – Пирсона [8]

$A^* = A_{\lambda^*}$, где $A_{\lambda^*} = \{\omega: z(\omega) \geq \lambda^*\}$; $p(d\omega) = z(\omega)g(d\omega)$; $g(A_{\lambda^*}) = \alpha$.

Однако может не существовать такого λ^* , для которого выполняется последнее равенство, поэтому изменим задачу. Постараемся не штрафовать в тех случаях, когда $X_N(\omega) > f(\omega)$, в результате получим упрощённую задачу:

$$\min_x E^P(f - xf) \text{ при ограничениях } 0 \leq x(\omega) \leq 1; E^* xf \leq C^*.$$

То есть финансовое обязательство f заменяем на xf . Тогда $E^P(f - xf)$ оценивает погрешность такой замены. В результате получаем задачу $\max_x E^P xf$ при ограничениях $0 \leq x(\omega) \leq 1$, $E^* xf \leq C^*$.

Из ограниченности сверху целевой функции и непустоты множества допустимых решений следует наличие решения у исходной задачи, что, в свою очередь, означает наличие решения и у двойственной задачи.

Двойственная задача имеет вид

$$\min_{\lambda \geq 0} [\sum_i \max((r(\omega_i) - \lambda g(\omega_i)), 0) + \lambda \alpha], \text{ где } r(d\omega) = \frac{f(\omega)}{E^P f} p(d\omega).$$

Зная λ^* и решение двойственной задачи, построим решение прямой задачи:

$$x^*(\omega) = \begin{cases} 1, r(\omega) - \lambda^* q(\omega) > 0 \\ 0, r(\omega) - \lambda^* q(\omega) < 0. \\ \delta, r(\omega) - \lambda^* q(\omega) = 0 \end{cases}$$

Значение δ определяется из уравнения $E_G x^* = \alpha$.

Вычислительный эксперимент

Вспользуемся примером решения задачи квантильного хеджирования в случае неполного рынка, подробно рассмотренным в работе [5]. Для простоты изложения ограничимся случаем $N = 2$. На данном примере покажем переход от неполного рынка к полному при помощи ХИФ.

Напомним, что $a_1 < 0 < a_2 < a_3$. Для хааровской интерполяции (\tilde{B}, \tilde{S}) , $N = 8$. Рассматриваем европейский опцион call, финансовое обязательство $f = (S_8 - K)^+$, где K – контрактная цена. Число различных значений S_8 равно 9. Так как построенный (\tilde{B}, \tilde{S}) -рынок полный, то мартингальная мера единственна. Как было отмечено ранее, в качестве мартингальной меры можно выбрать одну из крайних мартингальных мер, задаваемых кортежами $\langle 1,1,2 \rangle$, $\langle 1,2,1 \rangle$, $\langle 2,1,1 \rangle$. Выберем, например, меру, задаваемую кортежем $\langle 1,1,2 \rangle$ $E^{P^*} f = \sum_{j=0}^N f(j)P^*(\omega = j)$ (табл. 3).

Естественная мера Q , определяемая рынком, была описана ранее.

Заметим, что данная модель представляет собой уже биномиальное дерево. Крайних атомов становится всего четыре в двухшаговой модели. Перепишем вероятности попадания в крайние атомы с учётом получившегося перехода к биномиальному дереву (табл. 4).

Таблица 3 / Table 3

Вероятности попадания в крайние атомы для рассматриваемой мартингальной меры с учётом двухшаговой модели для совпадающих σ -подалгебр / Probabilities of hitting the outermost atoms for the martingale measure under consideration, taking into account the two-step model for coinciding σ -subalgebras

$\bar{\Omega}$	k1	k2	k3	$R\{1,1,2\}$ (при $n = 2$)
A1	2	0	0	p_1^2
A2	1	1	0	p_1q_1
A3	1	0	1	0
A4	1	1	0	p_1q_1
A5	0	2	0	q_1^2
A6	0	1	1	0
A7	1	0	1	0
A8	0	1	1	0
A9	0	0	2	0

Таблица 4 / Table 4

Вероятности попадания в крайние атомы для рассматриваемой мартингальной меры с учётом двухшаговой модели для совпадающих σ -подалгебр (перешли к биномиальному дереву) / Probabilities of hitting the extreme atoms for the martingale measure under consideration, taking into account the two-step model for matching σ -subalgebras (moved to the binomial tree)

$\bar{\Omega}$	k1	k2	k3	$R\{1,1,2\}$ (при $n = 2$)
A1	2	0	0	p_1^2
A2	1	1	0	p_1q_1
A3	1	1	0	p_1q_1
A4	0	2	0	q_1^2

Решим двойственную задачу и перейдём к решению исходной, в итоге получим решение внутренней задачи (табл. 5).

Таблица 5 / Table 5

Решение внутренней задачи / Solution of the internal problem

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	0,9567	0

Стоимости акций в конечный момент времени: 2: 16,2 13,5 13,5 11,25.

Далее определяем капитал в конечный момент времени на атомах $A_i, i = 1..4$ (табл. 6).

Таблица 6 / Table 6

Капитал в конечный момент времени / Capital at the end time

A1	A2	A3	A4
11,2	8,5	8,1	0

Восстановим итерационным методом капитал портфеля для рассматриваемой мартингалной меры (табл. 7).

Таблица 7 / Table 7

**Значения капитала во все моменты времени для кортежа $R\langle 1, 1, 2 \rangle$
/ Capital values at all times for the tuple $R\langle 1, 1, 2 \rangle$**

Кортеж, определяющий мартингалную меру	Момент времени	Значения капитала
$R\langle 1,1,2 \rangle$	$N = 0$	[1,8]
	$N = 2$	[4,8, 2,7]
	$N = 8$	[11,2, 8,5, 8,1, 0]

Заключение

Таким образом, в статье рассмотрена ХИФ и описан процесс интерполяции. Для выбора единственной мартингалной меры полного рынка введено в рассмотрение понятие расстояния Кульбака – Лейблера, с помощью которого зафиксирована единственная мартингалная мера. От решения задачи квантильного хеджирования для неполного рынка осуществлён переход к задаче квантильного хеджирования для полного рынка. Полученная задача решена для тринომальной модели. Построенный полный рынок соответствует уже не триномальной, а биномиальной модели, аналогичный результат был получен и в случае неполного рынка [1].

Список источников

1. Данилова Н.В., Землякова И.А. Квантильное хеджирование на неполном рынке // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2019. № 2. С. 4–9.
2. Богачёва М.Н. Построение совершенных хеджей посредством приближения мартингалных мер // Наукоедение. 2012. № 3 (12). С. 81.
3. Богачёва М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2002. № 3. С. 16–23.
4. Богачёва М.Н., Павлов И.В. О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57, вып. 3. С. 143–144.
5. Волосатова Т.А., Павлов И.В. Интерполирование финансовых рынков до полных рынков и минимизация моментов нарушения полноты // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2005. № S1. С. 9–16.
6. Николенко С.И., Кадурын А., Архангельская Е.В. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. СПб.: Питер, 2020. 480 с.
7. Follmer H., Leukert P. Quantile Hedging // Finance and Stochastics. 1999. Vol. 3, № 3. P. 251–273.
8. Rudloff B. A Generalized Neyman-Pearson Lemma for Hedge Problems in Incomplete Markets // Proceedings of the Workshop “Stochastic Analysis”. 27.09.2004-29.09.2004. Chemnitz, 2005. P. 241–250.

References

1. Danilova N.V., Zemlyakova I.A. Quantile hedging on the incomplete market. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2019;(2):4-9. (In Russ.).
2. Bogacheva M.N. Building perfect hedges by approximating martingale measures. *Naukovedenie = Science Studies*. 2012;(3):81. (In Russ.).
3. Bogacheva M.N., Pavlov I.V. On the Haar extensions of non-arbitrage financial markets to non-arbitrage and full. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2002;(3):16-23. (In Russ.).
4. Bogacheva M.N., Pavlov I.V. On the Haar extensions of non-arbitrage financial markets to non-arbitrage and full. *Uspekhi mat. nauk = Russian Mathematical Surveys*. 2002;57(3):143-144. (In Russ.).

5. Volosatova T.A., Pavlov I.V. Interpolation of financial markets to full markets and minimization of moments of completeness violation. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2005;(S1):9-16. (In Russ.).

6. Nikolenko S.I., Kadurin A., Arkhangelskaya E.V. *Deep learning. Immersion in the world of neural networks*. St. Petersburg: Piter Publ.; 2020. 480 p. (In Russ.).

7. Follmer H., Leukert P. Quantile Hedging. *Finance and Stochastics*. 1999;3(3):251-273.

8. Rudloff B. A Generalized Neyman-Pearson Lemma for Hedge Problems in Incomplete Markets. *Proceeding of the Workshop "Stochastic Analysis"*. 27.09.2004-29.09.2004. Chemnitz, 2005:241-250.

Информация об авторе

И.А. Землякова – кандидат физико-математических наук, ассистент, кафедры высшей математики и исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the author

I.A. Zemlyakova - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Assistant, Department of Higher Mathematics and Operations Research, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 07.07.2022; одобрена после рецензирования 24.07.2022; принята к публикации 15.11.2022.

The article was submitted 07.07.2022; approved after reviewing 24.07.2022; accepted for publication 15.11.2022.

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-29-41

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЛИЯНИЯ ДЕФЕКТА ПОКРЫТИЯ НА ПОВЕРХНОСТНЫЙ ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС

Максим Николаевич Колесников¹, Алла Владимировна Павлова², Илья Сергеевич Телятников³✉

^{1, 2, 3}Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

¹kolesnikov@kubsu.ru

²pavlova@math.kubsu.ru

³ilux_t@list.ru

Аннотация. Представлен аналитико-численный факторизационный метод исследования взаимодействия пластин покрытия в области контакта на прямолинейном разломе. Новые аналитические представления решения задачи, позволяющие оценить поведение поверхности среды, получены с использованием в качестве инструмента метода собственных функций и метода блочного элемента.

Проведен расчет волнового поля на поверхности однородного упругого слоя с заземленной нижней гранью и составным покрытием при варьировании физико-механических характеристик пластин и подложки. Проиллюстрированы результаты численной реализации разработанного алгоритма, приведено краткое обсуждение влияния граничных условий на разломе, а также физико-механических свойств неоднородного покрытия и подложки на волновое поле, формируемое под воздействием вертикального локализованного поверхностного источника.

Ключевые слова: пластина Кирхгофа, слой с покрытием, вибрация, прямолинейный разлом, метод собственных функций, факторизация

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Кубанского научного фонда № 22-21-20032, <https://rscf.ru/project/22-21-20032/>.

Для цитирования: Колесников М.Н., Павлова А.В., Телятников И.С. К исследованию влияния дефекта покрытия на поверхностный волновой процесс // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 29–41.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

ON THE STUDY OF THE COATING DEFECT INFLUENCE ON THE SURFACE WAVE PROCESS

Maxim N. Kolesnikov¹, Alla V. Pavlova², Ilya S. Telyatnikov³ ✉

^{1, 2, 3}Kuban State University, Krasnodar, Russia

¹kolesnikov@kubsu.ru

²pavlova@math.kubsu.ru

³ilux_t@list.ru

© Колесников М.Н., Павлова А.В., Телятников И.С., 2022

Abstract. *The paper presents an analytical and numerical factorization method for studying the interaction of coating plates in the contact area on a rectilinear fault. Using the method of eigenfunctions and the block element method, we obtained new analytical representations of the solution for the problem, which makes it possible to estimate the behavior of the surface of the medium.*

We have calculated the wave field on the surface of a homogeneous elastic layer with a pinched bottom face and a composite coating with varying physical and mechanical characteristics of the plates and substrate. We have also illustrated the results of the numerical implementation for the developed algorithm and given a brief discussion about the influence of the fault boundary conditions, as well as the physical and mechanical properties of the inhomogeneous coating and substrate on the wave field formed under the influence of a vertical localized surface source.

Keywords: *Kirchhoff plate, coated layer, vibration, rectilinear fault, eigenfunction method, factorization*

Acknowledgments: *the study was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation No. 22-21-20032, <https://rscf.ru/project/22-21-20032/>.*

For citation: *Kolesnikov M.N., Pavlova A.V., Telyatnikov I.S. On the Study of the Coating Defect Influence on the Surface Wave Process. Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science. 2022;(4-1):29-41. (In Russ.).*

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование волновых процессов в упругих материалах с покрытием – актуальная проблема механики деформируемого твердого тела, имеющая важное теоретическое и практическое значение в различных областях науки и техники – механике новых материалов, строительстве, сейсмологии, горной механике и т.д.

Для решения конкретных проблем используются различные механические модели покрытий [1–6], диктующие разные подходы к решению задач. Обзор некоторых из них представлен в [7]. В связи с внедрением в практику современных функциональных композиционных материалов, в том числе покрытий, круг прикладных проблем постоянно растет, порождая новые задачи для пластин, оболочек и сред с покрытиями в широком диапазоне постановок [8–11].

В сейсмологии особенно актуально исследование напряженно-деформированного состояния геологических структур в шовных зонах литосферных образований различного ранга. Изучение возмущения поверхности таких сред особенно важно при наличии как зарождающихся, так и изначально присутствующих дефектов.

Решение динамических задач теории упругости возможно с позиции различных подходов, одним из которых является метод конечных элементов (МКЭ), получивший большую популярность ввиду своей высокой точности и возможности изучать деформирование тел сложной геометрии, а также благодаря мощным современным вычислительным пакетам. МКЭ чаще применяется к телам конечной формы. Для областей, содержащих бесконечно удаленную точку, МКЭ требует определенной модификации и формулировки неотражающих граничных условий на поперечных границах.

В работах [12, 13] применительно к сложноструктурированным средам развивается метод блочного элемента, позволяющий исследовать задачи в том числе и для разноразмерных блоков среды. Целью настоящей работы является реализация подхода, предложенного в [12, 13], для упрощенного анализа деформационно-волновых процессов в системе покрытие – подложка в случае прямолинейного вертикального разлома покрытия для различных граничных условий на его берегах.

Проведен расчет волнового поля на поверхности однородного упругого слоя с защемленной нижней гранью и составным покрытием. Иллюстрируются и кратко обсуждаются полученные данные о влиянии граничных условий на разломе, а также физико-механических характеристик неоднородного покрытия и подложки на волновое поле, возбуждаемое воздействием вертикального локализованного поверхностного источника.

Постановка задачи

Колебания пластин Кирхгофа, моделирующих составное покрытие и занимающих полуплоскости $\Omega_+ = \{-\infty < x_2 < +\infty, x_1 > 0\}$ и $\Omega_- = \{-\infty < x_2 < +\infty, x_1 < 0\}$, после отделения временного множителя описываются системой уравнений относительно амплитуд смещений их срединной плоскости $\mathbf{u}_\pm(x_1, x_2)$ в рамках установившегося режима с частотой ω [14]. Здесь и далее индекс «+» указывает на правую полуплоскость, «-» – на левую. Представив внешние нагрузки $p_{\pm 1}, p_{\pm 2}, p_{\pm 3}$ в виде суммы контактных напряжений $p_{\pm 1} = g_{\pm 1} + t_{\pm 1}, p_{\pm 2} = g_{\pm 2} + t_{\pm 2}, p_{\pm 3} = g_{\pm 3} - t_{\pm 3}$ вектора амплитуд напряжений $\mathbf{g}_\pm = \{g_{\pm k}\}$, действующих на нижнюю границу соответствующей пластины со стороны подложки, и поверхностных напряжений, которым отвечает вектор внешней нагрузки с компонентами $t_{\pm k}$ ($k = \overline{1,3}$), систему можно записать в виде

$$\mathbf{R}_\pm(\partial x_1, \partial x_2)\mathbf{u}_\pm(x_1, x_2) - \mathbf{E}_\pm \mathbf{g}_\pm(x_1, x_2) = \mathbf{b}_\pm(x_1, x_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\pm, \quad (1)$$

где ненулевые элементы матричных дифференциальных операторов \mathbf{R}_\pm имеют вид $R_{11} = \partial^2/\partial x_1^2 + \varepsilon_{\pm 1} \partial^2/\partial x_2^2 + \varepsilon_{\pm 4}$; $R_{22} = \partial^2/\partial x_2^2 + \varepsilon_{\pm 1} \partial^2/\partial x_1^2 + \varepsilon_{\pm 4}$; $R_{33} = \varepsilon_{\pm 3} \nabla^4 - \varepsilon_{\pm 4}$; $R_{12} = R_{21} = \varepsilon_{\pm 2} \partial^2/\partial x_1 \partial x_2$; $\mathbf{E}_\pm = \text{diag}\{-\varepsilon_{\pm 5}, -\varepsilon_{\pm 5}, \varepsilon_{\pm 5}\}$; $\mathbf{b}_\pm(x_1, x_2) = -\varepsilon_{\pm 5} \mathbf{t}_\pm(x_1, x_2)$; $\varepsilon_{\pm 1} = 0,5(1 - \nu_\pm)$; $\varepsilon_{\pm 2} = 0,5(1 + \nu_\pm)$; $\varepsilon_{\pm 3} = h_\pm^2/12$; $\varepsilon_{\pm 4} = \omega^2 \rho_\pm (1 - \nu_\pm^2) E_\pm^{-1}$; $\varepsilon_{\pm 5} = (1 - \nu_\pm^2) E_\pm^{-1} h_\pm^{-1}$; $\nabla^4 = \partial^4/\partial x_1^4 + 2\partial^4/\partial x_1^2 \partial x_2^2 + \partial^4/\partial x_2^4$; ρ_\pm – плотности; E_\pm – модули Юнга; ν_\pm – коэффициенты Пуассона; h_\pm – толщины пластин; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Здесь и далее гармонический временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.

Оси декартовой системы координат выбраны, как показано на рис. 1. Ось разлома совпадает с осью Ox_2 . Внешняя нагрузка приложена к свободной от напряжений поверхности $x_3 = 0$ в ограниченной области.

На поверхности основания представление волнового поля через напряжения [15] имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}(x_1, x_2) = \{u_k\}$, $k = \overline{1,3}$, – вектор амплитуд смещений на поверхности упругого основания; $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ – матрица Грина подложки; $\mathbf{g}(x_1, x_2) = \{g_k\}$ – вектор амплитуд напряжений. В качестве условий излучения волн на бесконечности использован принцип предельного поглощения [15], согласно которому выбраны контуры σ_1, σ_2 в комплексной плоскости α_1 .

Вид матриц $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ для различных оснований приводится в монографиях [15–17]. В случае оснований конечной толщины (слой, пакет слоев) элементы $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ – мероморфные функции без точек ветвления. Для однородного упругого слоя, сцепленного с недеформируемым основанием, матрица $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ приведена, например, в [17].

Предполагая жесткое сцепление покрытия с подложкой, задается непрерывность напряжений и перемещений в областях их контакта

$$\mathbf{u}_\pm(x_1, x_2) = \mathbf{u}(x_1, x_2), \quad \mathbf{g}_\pm(x_1, x_2) = \mathbf{g}(x_1, x_2), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\pm. \quad (3)$$

Наличие разлома покрытия требует формулировки граничных условий на стыке пластин. Условия вдоль прямой $x_1 = 0$ на срединной плоскости задаются соотношениями

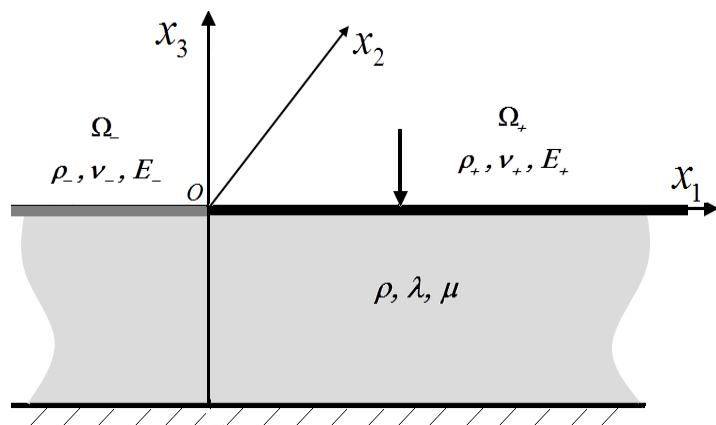


Рис. 1. Схема задачи / Fig. 1. Task scheme

$$\mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2)\mathbf{u}(x_1, x_2)|_{x_1=+0} + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2)\mathbf{u}(x_1, x_2)|_{x_1=-0} = \mathbf{f}(x_2), \quad -\infty < x_2 < \infty. \quad (4)$$

Взаимодействия частей покрытия в области их контакта определяет конкретный вид операторов $\mathbf{L}_j(\partial x_1, \partial x_2)$, $j = \overline{1, 2}$, и правой части $\mathbf{f}(x_2)$, различные их варианты описаны в [14, 17].

Метод собственных функций решения пространственной задачи

Применив к (1) преобразование Фурье по x_2 , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), матричная запись которой примет вид

$$\mathbf{R}_\pm(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{\mathbf{u}}_\pm(x_1, \alpha_2) - \mathbf{E}_\pm \bar{\mathbf{g}}_\pm(x_1, \alpha_2) = \bar{\mathbf{b}}_\pm(x_1, \alpha_2), \quad \pm x_1 > 0, \quad (5)$$

где $\bar{\mathbf{u}}_\pm(x_1, \alpha_2) = \mathbf{V}(x_1, \alpha_2)\mathbf{u}_\pm$; $\bar{\mathbf{g}}_\pm(x_1, \alpha_2) = \mathbf{V}(x_1, \alpha_2)\mathbf{g}_\pm$; \mathbf{V} – оператор интегрального преобразования Фурье.

Исходя из условий ограниченности в заданных плоскостях и принципа предельного поглощения, используемого при отыскании смещений упругого основания, общие решения (5) запишутся в виде

$$\bar{\mathbf{u}}_\pm(x_1, \alpha_2) = \mathbf{V}^{-1}(x_1, \alpha_2) \left[\mathbf{R}_\pm^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) (\mathbf{E}_\pm \mathbf{G}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)) \right] + \sum_{j=1}^4 A_{\pm j}(\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_{j\pm}(x_1, \alpha_2), \quad \pm x_1 > 0,$$

где $\bar{\mathbf{u}}_{j\pm} = \{u_{m\pm}^{(j)}\}$ – решения однородных уравнений, соответствующих (5), обладающие указанными свойствами; \mathbf{V}^2 – оператор двумерного преобразования Фурье; $\mathbf{R}_\pm(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \mathbf{V}^2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{R}_\pm(\partial x_1, \partial x_2)$; произвольные $A_{\pm j}(\alpha_2)$ в дальнейшем подлежат определению.

Преобразование Фурье по переменной x_1 на соответствующих полупрямых приводит соотношения для интегральных характеристик смещений пластин к виду

$$\mathbf{U}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \left[\mathbf{R}_\pm^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) (\mathbf{E}_\pm \mathbf{G}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)) \right]_{\sigma_1}^\pm + \sum_{j=1}^4 A_{\pm j}(\alpha_2) \mathbf{U}_{j\pm}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_1 \in \sigma_1,$$

где выражение в фигурных скобках факторизуется по переменной α_1 в виде суммы относительно контура σ_1 . Используя теорию вычетов [18], получим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) = & \mathbf{R}_\pm^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) (\mathbf{E}_\pm \mathbf{G}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)) - \\ & - \sum_{j=1}^4 \mathbf{R}_{j\pm}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) (\mathbf{E}_\pm \mathbf{G}_\pm(q_j^\pm, \alpha_2) + \mathbf{B}_\pm(q_j^\pm, \alpha_2)) + \sum_{j=1}^4 A_{\pm j}(\alpha_2) \mathbf{U}_{j\pm}(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{R}_{j\pm}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 - q_j^\pm)^{-1} \operatorname{Res}_{\xi_1=q_j^\pm} \mathbf{R}_\pm^{-1}(-i\xi_1, -i\alpha_2)$; $q_j^\pm(\alpha_2)$ – нули $\det \mathbf{R}_\pm(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ по переменной α_1 , расположенные выше и ниже σ_1 , $j = \overline{1, 4}$.

Из последних соотношений с учетом (2) и условий на границе покрытия и подложки (3), которые в образах Фурье принимают вид

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{U}_+(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{U}_-(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_+(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_-(\alpha_1, \alpha_2), \quad (7)$$

вытекает система функционально-матричных уравнений относительно $\mathbf{U}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)$, которая, в свою очередь, может быть преобразована к решаемой с помощью метода Винера – Хопфа.

$$\mathbf{U}_+ + \mathbf{N}\mathbf{U}_- = \mathbf{Q}_0 + \sum_{j=1}^4 [A_{+j}(\alpha_2)\mathbf{Q}_{j+} + A_{-j}(\alpha_2)\mathbf{Q}_{j-} + \mathbf{Q}_{j+}^q \mathbf{G}_+(q_j^+, \alpha_2) + \mathbf{Q}_{j-}^q \mathbf{G}_-(q_j^-, \alpha_2)], \quad \text{где}$$

$$\mathbf{N}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{N}_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{N}_2(\alpha_1, \alpha_2); \quad \mathbf{Q}_0(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{Q}_{0+}(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{Q}_{0-}(\alpha_1, \alpha_2);$$

$$\mathbf{N}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}\mathbf{E}_+^{-1}\mathbf{R}_+(-i\alpha_1, -i\alpha_2) - \mathbf{I}; \quad \mathbf{N}_2(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}\mathbf{E}_-^{-1}\mathbf{R}_-(-i\alpha_1, -i\alpha_2) - \mathbf{I};$$

$$\mathbf{Q}_{0\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{D}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) \left[\mathbf{B}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{R}_\pm(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \sum_{j=1}^4 \mathbf{R}_{j\pm}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{B}_\pm(q_j^\pm, \alpha_2) \right];$$

$$\mathbf{Q}_{j\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{D}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{R}_\pm(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{U}_{j\pm}(\alpha_1, \alpha_2);$$

$$\mathbf{D}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{N}_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{E}_\pm^{-1}; \quad \mathbf{I} - \text{единичная матрица};$$

$$\mathbf{Q}_{j\pm}^q(\alpha_1, \alpha_2) = -\mathbf{D}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{R}_\pm(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{R}_{j\pm}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{E}_\pm; \quad j = \overline{1, 4}.$$

Теперь, факторизовав $\mathbf{N}(\alpha_1, \alpha_2)$ по α_1 относительно контура σ_1 в виде произведения $\mathbf{N}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{N}_+^\sigma(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{N}_-^\sigma(\alpha_1, \alpha_2)$ и умножив последнюю функционально-матричную систему на $(\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}$, получим

$$(\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}\mathbf{U}_+ + \mathbf{N}_-^\sigma\mathbf{U}_- = \mathbf{P}_0 + \sum_{j=1}^4 [A_{+j}(\alpha_2)\mathbf{P}_{j+} + A_{-j}(\alpha_2)\mathbf{P}_{j-} + \mathbf{P}_{j+}^q\mathbf{G}_+(q_j^+, \alpha_2) + \mathbf{P}_{j-}^q\mathbf{G}_-(q_j^-, \alpha_2)], \quad (8)$$

где $\mathbf{P}_0(\alpha_1, \alpha_2) = (\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}\mathbf{Q}_0(\alpha_1, \alpha_2)$; $\mathbf{P}_{j\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = (\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}\mathbf{Q}_{j\pm}(\alpha_1, \alpha_2)$; $\mathbf{P}_{j\pm}^q(\alpha_1, \alpha_2) = (\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}\mathbf{Q}_{j\pm}^q(\alpha_1, \alpha_2)$, $j = \overline{1,4}$.

Слагаемые правой части (8) факторизуем в виде суммы. При этом левая часть – сумма регулярных, соответственно, в областях Θ_+^σ (выше контура) и Θ_-^σ (ниже контура) вектор-функций $(\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}\mathbf{U}_+ \equiv \left\{ (\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}\mathbf{U}_+ \right\}_\sigma^+$, $\mathbf{N}_-^\sigma\mathbf{U}_- \equiv \left\{ \mathbf{N}_-^\sigma\mathbf{U}_- \right\}_\sigma^-$.

К решению полученной системы функционально-матричных уравнений можно применить метод Винера – Хопфа. Перенесем в левую часть все слагаемые, регулярные в области Θ_+^σ , а в правую – регулярные в области Θ_-^σ , получим

$$\begin{aligned} & (\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}\mathbf{U}_+ - \left\{ \mathbf{P}_0 \right\}_\sigma^+ - \sum_{j=1}^4 \left[A_{+j}(\alpha_2)\left\{ \mathbf{P}_{j+} \right\}_\sigma^+ + A_{-j}(\alpha_2)\left\{ \mathbf{P}_{j-} \right\}_\sigma^+ + \left\{ \mathbf{P}_{j+}^q \right\}_\sigma^+ \mathbf{G}_+(q_j^+, \alpha_2) + \left\{ \mathbf{P}_{j-}^q \right\}_\sigma^+ \mathbf{G}_-(q_j^-, \alpha_2) \right] = \\ & = \sum_{j=1}^4 \left[A_{+j}(\alpha_2)\left\{ \mathbf{P}_{j+} \right\}_\sigma^- + A_{-j}(\alpha_2)\left\{ \mathbf{P}_{j-} \right\}_\sigma^- + \left\{ \mathbf{P}_{j+}^q \right\}_\sigma^- \mathbf{G}_+(q_j^+, \alpha_2) + \left\{ \mathbf{P}_{j-}^q \right\}_\sigma^- \mathbf{G}_-(q_j^-, \alpha_2) \right] + \left\{ \mathbf{P}_0 \right\}_\sigma^- - \mathbf{N}_-^\sigma\mathbf{U}_- \equiv \mathbf{\Gamma}(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

Используя обобщенную теорему Лиувилля [18], можно утверждать, что вектор-функция $\mathbf{\Gamma}(\alpha_1, \alpha_2)$ регулярна во всей комплексной плоскости α_1 и $\mathbf{\Gamma}(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 0$ для $|\alpha_1| \rightarrow \infty$. Отсюда $\mathbf{\Gamma}(\alpha_1, \alpha_2) \equiv 0$ при $\alpha_2 \in R$. Таким образом, получаем парные системы функциональных уравнений [19]

$$\begin{aligned} & (\mathbf{N}_+^\sigma)^{-1}\mathbf{U}_+ = \left\{ \mathbf{P}_0 \right\}_\sigma^+ + \sum_{j=1}^4 \left[A_{+j}(\alpha_2)\left\{ \mathbf{P}_{j+} \right\}_\sigma^+ + A_{-j}(\alpha_2)\left\{ \mathbf{P}_{j-} \right\}_\sigma^+ + \left\{ \mathbf{P}_{j+}^q \right\}_\sigma^+ \mathbf{G}_+(q_j^+, \alpha_2) + \left\{ \mathbf{P}_{j-}^q \right\}_\sigma^+ \mathbf{G}_-(q_j^-, \alpha_2) \right]; \\ & \mathbf{N}_-^\sigma\mathbf{U}_- = \left\{ \mathbf{P}_0 \right\}_\sigma^- + \sum_{j=1}^4 \left[A_{+j}(\alpha_2)\left\{ \mathbf{P}_{j+} \right\}_\sigma^- + A_{-j}(\alpha_2)\left\{ \mathbf{P}_{j-} \right\}_\sigma^- + \left\{ \mathbf{P}_{j+}^q \right\}_\sigma^- \mathbf{G}_+(q_j^+, \alpha_2) + \left\{ \mathbf{P}_{j-}^q \right\}_\sigma^- \mathbf{G}_-(q_j^-, \alpha_2) \right]. \end{aligned}$$

Факторизация матриц – основная сложность предлагаемого метода. Методы приближенной факторизации описаны в [15, 20].

Выражения для Фурье-образов амплитуд смещений пластин $\mathbf{U}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) = & \mathbf{U}_\pm^0(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{j=1}^4 \left[A_{+j}(\alpha_2)\mathbf{U}_\pm^{j+}(\alpha_1, \alpha_2) + A_{-j}(\alpha_2)\mathbf{U}_\pm^{j-}(\alpha_1, \alpha_2) + \right. \\ & \left. + \mathbf{U}_{q_\pm}^{j+}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{G}_+(q_j^+, \alpha_2) + \mathbf{U}_{q_\pm}^{j-}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{G}_-(q_j^-, \alpha_2) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

где $\mathbf{U}_+^0 = \mathbf{N}_+^\sigma \left\{ \mathbf{P}_0 \right\}_\sigma^+$; $\mathbf{U}_-^0 = (\mathbf{N}_-^\sigma)^{-1} \left\{ \mathbf{P}_0 \right\}_\sigma^-$; $\mathbf{U}_+^{j\pm} = \mathbf{N}_+^\sigma \left\{ \mathbf{P}_{j\pm} \right\}_\sigma^+$; $\mathbf{U}_-^{j\pm} = (\mathbf{N}_-^\sigma)^{-1} \left\{ \mathbf{P}_{j\pm} \right\}_\sigma^-$; $\mathbf{U}_{q_+}^{j\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{N}_+^\sigma \left\{ \mathbf{P}_{j\pm}^q \right\}_\sigma^+$; $\mathbf{U}_{q_-}^{j\pm} = (\mathbf{N}_-^\sigma)^{-1} \left\{ \mathbf{P}_{j\pm}^q \right\}_\sigma^-$.

Выражения (9) содержат восемь неизвестных вектор-функций $\mathbf{G}_\pm(q_j^\pm(\alpha_2), \alpha_2)$, $j = \overline{1,4}$. Для исключения их из трансформант $\mathbf{U}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)$ искомым перемещением найдем из (8) $\mathbf{U}_\pm(q_j^\pm(\alpha_2), \alpha_2)$, $j = \overline{1,4}$, и подставим их в соответствующие соотношения для $\mathbf{G}_\pm(q_j^\pm(\alpha_2), \alpha_2)$, получаемые из соотношений (6). Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $\mathbf{G}_\pm(q_j^\pm(\alpha_2), \alpha_2)$ приводит в итоге к представлению $\mathbf{U}_\pm(\alpha_1, \alpha_2)$, в которое входят произвольные $A_{\pm j}(\alpha_2)$, в виде $\mathbf{U}_\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{U}}_\pm^0(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{j=1}^4 A_{+j}(\alpha_2)\tilde{\mathbf{U}}_\pm^{j+}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{j=1}^4 A_{-j}(\alpha_2)\tilde{\mathbf{U}}_\pm^{j-}(\alpha_1, \alpha_2)$.

Заданные граничные условия (4) определяют значения $A_{\pm j}(\alpha_2)$. Обращение преобразования Фурье по параметру α_1 дает $\bar{u}_{\pm}(x_1, \alpha_2) = \bar{u}_{\pm}^0(x_1, \alpha_2) + \sum_{j=1}^4 [A_{+j}(\alpha_2)\bar{u}_{\pm}^{j+}(x_1, \alpha_2) + A_{-j}(\alpha_2)\bar{u}_{\pm}^{j-}(x_1, \alpha_2)]$,

где $\bar{u}_{\pm}(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1, \alpha_2)U_{\pm}$; $\bar{u}_{\pm}^0(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1, \alpha_2)\tilde{U}_{\pm}^0$; $\bar{u}_{\pm}^{j+}(x_1, \alpha_2) = V^{-1}(x_1, \alpha_2)\tilde{U}_{\pm}^{j+}$. В свою очередь, условия (4) в образах Фурье по переменной x_2 принимают вид $L_1(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{+}(0, \alpha_2) + L_2(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{-}(0, \alpha_2) = F(\alpha_2)$.

Вычисление выражения левой части приводит к СЛАУ

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^4 A_{+j}(\alpha_2) [L_1(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{+}^{j+}(0, \alpha_2) + L_2(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{-}^{j+}(0, \alpha_2)] + \\ & + \sum_{j=1}^4 A_{-j}(\alpha_2) [L_1(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{+}^{j-}(0, \alpha_2) + L_2(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{-}^{j-}(0, \alpha_2)] = \\ & = F(\alpha_2) - L_1(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{+}^0(0, \alpha_2) - L_2(\partial x_1, -i\alpha_2)\bar{u}_{-}^0(0, \alpha_2), \end{aligned}$$

решение которой позволяет получить окончательный вид выражений для смещений поверхности системы путем обращения преобразования Фурье по параметру α_2 : при $x_1 > 0$ – к $\bar{u}_{+}(x_1, \alpha_2)$, при $x_1 < 0$ – к $\bar{u}_{-}(x_1, \alpha_2)$, $u_{\pm}(x_1, x_2) = V^{-1}(x_1, x_2)\bar{u}_{\pm}(x_1, \alpha_2)$, $x \in \Omega_{\pm}$.

Решение плоской задачи о вертикальных колебаниях протяженных пластин

Далее рассматриваются вертикальные гармонические воздействия на систему покрытие – подложка. В моделях сейсмологии нередко решаются подобные задачи, так как пульсационный механизм часто представляется как глобальная закономерность всех шовных зон межплитовой коллизии [21].

Уравнения колебания пластин (1) в скалярном случае после отделения временного множителя принимают вид

$$R_{\pm}(\partial x_1)u_{\pm}(x_1) - \varepsilon_{\pm 5}g_{\pm}(x_1) = b_{\pm}(x_1), \quad \pm x_1 > 0, \quad (10)$$

$R_{\pm}(\partial x_1) = \varepsilon_{\pm 3} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - \varepsilon_{\pm 4}$; $b_{\pm}(x_1) = -\varepsilon_{\pm 5}t_{\pm}(x_1)$; сосредоточенная нагрузка $t_{+}(x_1) = A\delta(x_1 - x_1^0)$ при-

ложена в $x_1^0 > 0$, интенсивность $A > 0$; $t_{-}(x_1) = 0$.

Перемещения на верхней границе упругого слоя (2) запишутся следующим образом:

$u(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi_1 - x_1)g(x_1)d\xi_1$, где $u(x_1)$ и $g(x_1)$ – соответственно амплитуды перемещений и

напряжений; $k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K(\alpha_1)\exp(-i\alpha_1 x_1)d\alpha_1$; функция Грина $K(\alpha_1) = K_{33}(\alpha_1, 0)$.

Функциональное соотношение для Фурье-образов перемещений и контактных давлений между основанием и покрытием имеет вид

$$U(\alpha_1) = K(\alpha_1)G(\alpha_1), \quad \alpha_1 \in \sigma, \quad (11)$$

где трансформанты Фурье по продольной координате $U(\alpha_1) = V(\alpha_1)u(x_1)$; $G(\alpha_1) = V(\alpha_1)g(x_1)$. Идеальное сопряжение предполагает: $u_{\pm}(x_1) = u(x_1)$, $g_{\pm}(x_1) = g(x_1)$, $\pm x_1 > 0$. В скалярном случае соотношение (7) примет вид

$$U(\alpha_1) = U_{+}(\alpha_1) + U_{-}(\alpha_1), \quad G(\alpha_1) = G_{+}(\alpha_1) + G_{-}(\alpha_1), \quad \alpha_1 \in \sigma. \quad (12)$$

В работах [22, 23] описан метод решения рассматриваемой задачи, связанный с преобразованием дифференциального оператора задачи. Метод собственных функций, описанный выше, дает следующее представление общих решений (10), удовлетворяющих условию ограниченности в заданных плоскостях и соответствующих принципу предельного поглощения:

$$u_{\pm}(x_1) = A_{\pm 1}e^{\mp q_{\pm}x_1} + A_{\pm 2}e^{\pm i q_{\pm}x_1} + V^{-1}(x_1) \left[R_{\pm}^{-1}(\alpha_1) (\varepsilon_{\pm 5}G_{\pm}(\alpha_1) + B_{\pm}(\alpha_1)) \right], \quad \pm x_1 > 0,$$

где $A_{\pm j}$, $j = \overline{1,2}$, – произвольные константы; $q_{\pm} \in \mathbb{R}$, $q_{\pm} > 0$ – корни уравнений $R_{\pm}(\alpha_1) = 0$; $R_{\pm}(\alpha_1) = \varepsilon_{\pm 3}(\alpha_1 - q_{\pm})(\alpha_1 - iq_{\pm})(\alpha_1 + q_{\pm})(\alpha_1 + iq_{\pm})$; $B_{+}(\alpha_1) = e^{i\alpha_1 x_1^0}$; $B_{-}(\alpha_1) = 0$.

В трансформантах эти соотношения примут вид

$$U_{\pm}(\alpha_1) = \frac{\pm iA_{\pm 1}}{\alpha_1 \pm iq_{\pm}} + \frac{\pm iA_{\pm 2}}{\alpha_1 \pm q_{\pm}} + \left\{ R_{\pm}^{-1}(\alpha_1) [\varepsilon_{\pm 5} G_{\pm}(\alpha_1) + B_{\pm}(\alpha_1)] \right\}_{\sigma}^{\pm}, \quad \alpha_1 \in \sigma.$$

$G_{+}(\alpha_1)$ будет регулярной в области $\alpha_1 \in \Theta_{+}^{\sigma}$, а $G_{-}(\alpha_1)$ – в области $\alpha_1 \in \Theta_{-}^{\sigma}$ при выборе σ достаточно близким к вещественной оси. Последние слагаемые правой части можно представить как

$$\left\{ R_{\pm}^{-1}(\alpha_1) [\varepsilon_{\pm 5} G_{\pm}(\alpha_1) + B_{\pm}(\alpha_1)] \right\}_{\sigma}^{\pm} = R_{\pm}^{-1}(\alpha_1) [\varepsilon_{\pm 5} G_{\pm}(\alpha_1) + B_{\pm}(\alpha_1)] - \left\{ R_{\pm}^{-1}(\alpha_1) [\varepsilon_{\pm 5} G_{\pm}(\alpha_1) + B_{\pm}(\alpha_1)] \right\}_{\sigma}^{\mp}.$$

Проведём факторизацию последнего выражения правой части. Учитывая, что $B_{+}(q_{+}) = e^{iq_{+} x_1^0}$, $B_{+}(iq_{+}) = e^{-q_{+} x_1^0}$, $B_{-}(-q_{-}) = 0$, $B_{-}(-iq_{-}) = 0$, получим

$$U_{\pm}(\alpha_1) = \frac{\pm iA_{\pm 1}}{\alpha_1 \pm iq_{\pm}} + \frac{\pm iA_{\pm 2}}{\alpha_1 \pm q_{\pm}} + R_{\pm}^{-1}(\alpha_1) [\varepsilon_{\pm 5} G_{\pm}(\alpha_1) + B_{\pm}(\alpha_1)] \mp \frac{1}{4q_{\pm}^3 \varepsilon_{\pm 3}} \left[\frac{\varepsilon_{\pm 5} G_{\pm}(\pm q_{\pm})}{\alpha_1 \mp q_{\pm}} + \frac{i\varepsilon_{\pm 5} G_{\pm}(\pm iq_{\pm})}{\alpha_1 \mp iq_{\pm}} + \frac{B_{\pm}(\pm q_{\pm})}{\alpha_1 \mp q_{\pm}} + \frac{iB_{\pm}(\pm iq_{\pm})}{\alpha_1 \mp iq_{\pm}} \right], \quad \alpha_1 \in \sigma. \quad (13)$$

Здесь значения $G_{\pm}(\pm q_{\pm})$ подлежат определению.

Из (11)–(13) путем ряда преобразований аналогично (9) можно получить следующие выражения для Фурье-образов $U_{\pm}(\alpha_1)$ искомым смещений поверхности:

$$U_{\pm} = \left(N_{\pm}^{\sigma} \right)^{\pm 1} \left[\left\{ D_{+} Q_{0+} \right\}_{\sigma}^{\pm} + \left\{ D_{-} Q_{0-} \right\}_{\sigma}^{\pm} + \sum_{j=1}^2 \left(A_{+j} \left\{ D_{+} Q_{j+} \right\}_{\sigma}^{\pm} + A_{-j} \left\{ D_{-} Q_{j-} \right\}_{\sigma}^{\pm} \right) + G_{+}(q_{+}) \left\{ D_{+} Q_{1+}^q \right\}_{\sigma}^{\pm} + G_{+}(iq_{+}) \left\{ D_{+} Q_{2+}^q \right\}_{\sigma}^{\pm} + G_{-}(-q_{-}) \left\{ D_{-} Q_{1-}^q \right\}_{\sigma}^{\pm} + G_{-}(-iq_{-}) \left\{ D_{-} Q_{2-}^q \right\}_{\sigma}^{\pm} \right]. \quad (14)$$

В (14) $N_{\pm}^{\sigma}(\alpha_1)$ – результат факторизации относительно контура σ в виде произведения $N(\alpha_1) = N_{+}^{\sigma}(\alpha_1) N_{-}^{\sigma}(\alpha_1)$ функции

$$N(\alpha_1) = N_1^{-1}(\alpha_1) N_2(\alpha_1), \quad N_1(\alpha_1) = \bar{N}_1(\alpha_1) R_{+}(\alpha_1); \quad N_2(\alpha_1) = \bar{N}_2(\alpha_1) R_{-}(\alpha_1);$$

$$\bar{N}_1(\alpha_1) = \varepsilon_{+5}^{-1} K(\alpha_1) - R_{+}^{-1}(\alpha_1); \quad \bar{N}_2(\alpha_1) = \varepsilon_{-5}^{-1} K(\alpha_1) - R_{-}^{-1}(\alpha_1); \quad Q_{1\pm} = \frac{\pm iR_{\pm}}{\alpha_1 \pm iq_{\pm}}; \quad Q_{2\pm} = \frac{\pm iR_{\pm}}{\alpha_1 \pm q_{\pm}};$$

$$D_{\pm} = \varepsilon_{\pm 5} \left(N_{\pm}^{\sigma} \right)^{-1} N_1^{-1} K; \quad Q_{1\pm}^q = \pm \frac{R_{\pm}}{4q_{\pm}^3 \varepsilon_{\pm 3}} \frac{\varepsilon_{\pm 5}}{\alpha_1 \mp q_{\pm}}; \quad Q_{2\pm}^q = \pm \frac{R_{\pm}}{4q_{\pm}^3 \varepsilon_{\pm 3}} \frac{i\varepsilon_{\pm 5}}{\alpha_1 \mp iq_{\pm}};$$

$$Q_{0\pm} = B_{\pm} \pm \frac{R_{\pm}}{4q_{\pm}^3 \varepsilon_{\pm 3}} \left[\frac{B_{\pm}(\pm q_{\pm})}{\alpha_1 \mp q_{\pm}} + \frac{iB_{\pm}(\pm iq_{\pm})}{\alpha_1 \mp iq_{\pm}} \right].$$

Факторизация функции $N(\alpha_1)$ осуществляется приближенно. С этой целью строится аппроксимирующая ее функция $N^A(\alpha_1)$ и $N(\alpha_1) \approx N_{+}^{A\sigma}(\alpha_1) N_{-}^{A\sigma}(\alpha_1)$. В работе [23] подробно описана аппроксимация функций, подлежащих факторизации.

$K(\alpha_1)$, $\bar{N}_1(\alpha_1)$ и $\bar{N}_2(\alpha_1)$ – четные функции, имеющие конечное число простых вещественных полюсов и нулей. Для функции $K(\alpha_1)$ вещественными полюсами являются $\pm p_j$, $j = \overline{1, M_p}$, для функции $\bar{N}_1(\alpha_1)$ – $\pm p_j$, $\pm q_{+}$, для функции $\bar{N}_2(\alpha_1)$ – $\pm p_j$, $\pm q_{-}$. Количество полюсов $K(\alpha_1)$ определяет количество поверхностных волн в упругом основании. Введем обозначение $z_{\bar{n}_k j} \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, N_z^{\bar{n}_k}}$, для положительных нулей $\bar{N}_k(\alpha_1)$, $k = \overline{1, 2}$. Рассмотрим функции вида

$$\bar{N}_{kR}(\alpha_1) = \Pi_{\bar{n}_k}^{-1}(\alpha_1) \bar{N}_k(\alpha_1), \quad k = \overline{1,2}; \quad \Pi_{\bar{n}_k}(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1^2 + l^2)^{M_p+1} \prod_{j=1}^{M_z^{\bar{n}_k}} (\alpha_1^2 - z_{\bar{n}_k,j}^2)}{(\alpha_1^2 + l^2)^{M_z^{\bar{n}_k}} (\alpha_1^2 - q_{\pm}^2) \prod_{j=1}^{M_p} (\alpha_1^2 - p_j^2)}, \quad l \in \mathbb{R}, \quad l > 0.$$

Здесь и далее знак «+» в этажном индексе «±» соответствует значению $k=1$, «-» – $k=2$.

Полученные $\bar{N}_{kR}(\alpha_1)$, $k = \overline{1,2}$, не имеют нулей и полюсов на вещественной оси и ведут себя на бесконечности так же, как и $\bar{N}_k(\alpha_1)$, $k = \overline{1,2}$, $\bar{N}_{kR}(\alpha_1) \sim O(\alpha_1^{-1})$. Построив аппроксимацию функций $\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + l_0^2}}{\kappa_{\bar{n}_k}} \bar{N}_{kR}(\alpha_1)$, $l_0 > l$, $l_0 \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,2}$, с помощью полиномов Бернштейна степени N_A [15],

$$\bar{M}_{kR}(\alpha_1) \approx \bar{M}_{kR}^A(\alpha_1) = \frac{\kappa_{\bar{n}_k} \prod_{j=1}^{N_A} (\alpha_1 - z_{\bar{n}_k,j}^A)(\alpha_1 + z_{\bar{n}_k,j}^A)}{\sqrt{\alpha_1^2 + l_0^2} (\alpha_1^2 + l^2)^{N_A}}, \quad k = \overline{1,2}, \quad \alpha_1 \in \sigma,$$

где $\kappa_{\bar{n}_k} = \lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \alpha_1 \bar{N}_k(\alpha_1)$, найдем $\bar{N}_k(\alpha_1) \approx \bar{N}_k^A(\alpha_1) = \Pi_{\bar{N}_k}(\alpha_1) \bar{N}_{kR}^A(\alpha_1)$, $N_k(\alpha_1) \approx N_k^A(\alpha_1) = \bar{N}_k^A(\alpha_1) R_{\pm}(\alpha_1)$, $k = \overline{1,2}$, $\alpha_1 \in \sigma$. Тогда функция $N^A(\alpha_1)$ может быть приближена

$$\begin{aligned} N(\alpha_1) \approx N^A(\alpha_1) &= (N_1^A)^{-1}(\alpha_1) N_2^A(\alpha_1) = (\bar{N}_1^A)^{-1}(\alpha_1) R_+^{-1}(\alpha_1) R_-(\alpha_1) \bar{N}_2^A(\alpha_1) = \\ &= \Pi_{\bar{n}_1}^{-1}(\alpha_1) (\bar{N}_{1R}^A)^{-1}(\alpha_1) R_+^{-1}(\alpha_1) R_-(\alpha_1) \bar{N}_{2R}^A(\alpha_1) \Pi_{\bar{n}_2}(\alpha_1) = \\ &= \frac{\kappa_{\bar{N}_2} \varepsilon_{-3} (\alpha_1^2 + l^2)^{M_z^{\bar{n}_2}} (\alpha_1^2 + q_-^2) \prod_{j=1}^{M_z^{\bar{n}_2}} (\alpha_1^2 - z_{\bar{n}_2,j}^2) \prod_{j=1}^{M_A} (\alpha_1^2 - (z_{\bar{n}_2,j}^A)^2)}{\kappa_{\bar{N}_1} \varepsilon_{+3} (\alpha_1^2 + l^2)^{M_z^{\bar{n}_1}} (\alpha_1^2 + q_+^2) \prod_{j=1}^{M_z^{\bar{n}_1}} (\alpha_1^2 - z_{\bar{n}_1,j}^2) \prod_{j=1}^{M_A} (\alpha_1^2 - (z_{\bar{n}_1,j}^A)^2)}, \quad \alpha_1 \in \sigma. \end{aligned}$$

Факторизация $N^A(\alpha_1)$ в виде произведения относительно контура σ , обходящего снизу вещественные положительные особенности и сверху – отрицательные, может быть представлена [23] как $N^A(\alpha_1) = N_+^{A\sigma}(\alpha_1) N_-^{A\sigma}(\alpha_1)$,

$$N_{\pm}^{\sigma}(\alpha_1) \approx N_{\pm}^{A\sigma}(\alpha_1) = \sqrt{\frac{\kappa_{\bar{N}_2} \varepsilon_{-3} (\alpha_1 \pm il)^{M_z^{\bar{n}_2}} (\alpha_1 \pm iq_-) \prod_{j=1}^{M_z^{\bar{n}_2}} (\alpha_1 \pm z_{\bar{n}_2,j}) \prod_{j=1}^{M_A} (\alpha_1 \pm z_{\bar{n}_2,j}^A)}{\kappa_{\bar{N}_1} \varepsilon_{+3} (\alpha_1 \pm il)^{M_z^{\bar{n}_1}} (\alpha_1 \pm iq_+) \prod_{j=1}^{M_z^{\bar{n}_1}} (\alpha_1 \pm z_{\bar{n}_1,j}) \prod_{j=1}^{M_A} (\alpha_1 \pm z_{\bar{n}_1,j}^A)}}.$$

Введение аппроксимаций с заданной точностью функций $K(\alpha_1)$ и $N_1(\alpha_1)$ легкофакторизуемыми функциями $K^A(\alpha_1)$ и $N_1^A(\alpha_1)$ обеспечивает возможность аналитического нахождения оригиналов по Фурье-образам соотношений (14). Приближенные значения трансформант Фурье искомым перемещений $U_{\pm}^A(\alpha_1) \approx U_{\pm}(\alpha_1)$, $\alpha_1 \in \sigma$.

Выражения $\{D_+^A Q_{0+}\}_{\sigma}^{\pm}$, $\{D_-^A Q_{0-}\}_{\sigma}^{\pm}$, $\{D_+^A Q_{j+}\}_{\sigma}^{\pm}$, $\{D_-^A Q_{j-}\}_{\sigma}^{\pm}$, $\{D_+^A Q_{j+}^q\}_{\sigma}^{\pm}$, $\{D_-^A Q_{j-}^q\}_{\sigma}^{\pm}$, $j = \overline{1,2}$, строятся с применением теоремы о вычетах и леммы Жордана [18]

$$\{D_+^A Q_{0+}\}_{\sigma}^{\pm} = D_+^A Q_{0+} - \{D_+^A Q_{0+}\}_{\sigma}^{\mp}, \quad \{D_+^A Q_{0+}\}_{\sigma}^{\pm} = \sum_{\xi \in \Xi_{\pm}} \frac{\text{res } D_+^A Q_{0+}}{\alpha_1 - \xi}, \quad \{D_-^A Q_{0-}\}_{\sigma}^{\pm} = 0,$$

$$\left\{D_+^A Q_{j+}\right\}_\sigma^\pm = \sum_{\xi \in \Xi_\pm} \frac{\operatorname{res} D_+^A Q_{j+}}{\alpha_1 - \xi}, \quad \left\{D_-^A Q_{j-}\right\}_\sigma^\pm = \sum_{\xi \in \Xi_\pm} \frac{\operatorname{res} D_-^A Q_{j-}}{\alpha_1 - \xi},$$

$$\left\{D_+^A Q_{j+}^q\right\}_\sigma^\pm = \sum_{\xi \in \Xi_\pm} \frac{\operatorname{res} D_+^A Q_{j+}^q}{\alpha_1 - \xi}, \quad \left\{D_-^A Q_{j-}^q\right\}_\sigma^\pm = \sum_{\xi \in \Xi_\pm} \frac{\operatorname{res} D_-^A Q_{j-}^q}{\alpha_1 - \xi}, \quad j = \overline{1, 2}.$$

Здесь использованы обозначения Ξ_\pm для множеств всех полюсов функций $D_\pm^A Q_{0\pm}$, $D_\pm^A Q_{j\pm}$, $D_\pm^A Q_{j\pm}^q$, принадлежащих областям Θ_\pm^σ соответственно:

$$\Xi_+ = \left\{il; iq_+; z_{\bar{n}_1 j} : j = \overline{1, M_{\bar{n}_1}}; z_{\bar{n}_1 j}^A : j = \overline{1, M_A}\right\},$$

$$\Xi_- = \left\{-il; -iq_-; -z_{\bar{n}_2 j} : j = \overline{1, M_{\bar{n}_2}}; -z_{\bar{n}_2 j}^A : j = \overline{1, M_A}\right\}.$$

В представлениях для $U_\pm^A(\alpha_1)$ содержатся неизвестные $G_+(q_1)$, $G_+(iq_1)$, $G_-(-q_2)$, $G_-(-iq_2)$, для исключения которых находим приближенные $U_+^A(q_1)$, $U_+^A(iq_1)$, $U_-^A(-q_2)$, $U_-^A(-iq_2)$ и, подставив их вместо соответствующих трансформант смещений в (13), определяем $G_+(q_1)$, $G_+(iq_1)$, $G_-(-q_2)$, $G_-(-iq_2)$, которые затем исключаются из приближенных выражений для $U_\pm^A(\alpha_1)$.

В результате обращения преобразования Фурье из $U_\pm^A(\alpha_1)$ получим $u_\pm(x_1) \approx u_\pm^A(x_1) = V^{-1} U_\pm^A(\alpha_1)$, $\pm x_1 > 0$.

Произвольные коэффициенты $A_{\pm j}$, $j = \overline{1, 2}$, входящие в $u_\pm^A(x_1)$, определяются из граничных условий на стыке пластин, как это было описано ранее.

Результаты модельных расчетов

Разработанные алгоритмы позволили провести расчеты для различных граничных условий на стыке пластин при варьировании свойств покрытия и упругой подложки. Далее все результаты приводятся в безразмерном виде. Линейные размеры отнесены к толщине правой пластины покрытия, а плотности – к величине плотности правой пластины. В численных примерах для покрытия зафиксированы безразмерные параметры: $\rho_+ = \rho_- = 1$, $\mu_+ = 1$, $\nu_+ = \nu_- = 0,125$. Для материала упругого основания $\rho = 1$. Вертикальная нагрузка приложена в точке $x_0 = 5$. Приведенная частота – $\bar{\omega} = \omega h_+ \sqrt{\frac{\rho_+}{\mu_+}}$, где ω – размерная частота.

На рис. 2–5 а соответствует случаю более жесткой правой пластины ($\mu_- = 0,2$); б – пластинам с одинаковыми свойствами ($\mu_- = 1$); в – случаю более жесткой левой пластины ($\mu_- = 5$).

Если края пластин на разломе смещаются свободно, изгибающие моменты $-D_\pm \frac{\partial^2 u_\pm}{\partial x_1^2}$ и поперечные силы $-D_\pm \frac{\partial^3 u_\pm}{\partial x_1^3}$, $D_\pm = \frac{E_\pm h_\pm^2}{12(1-\nu_\pm^2)}$ в этой области $\frac{\partial^2 u_\pm}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0$, $\frac{\partial^3 u_\pm}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = 0$.

Если края пластин на разломе смещаются жестко, то $\frac{\partial^2 u_\pm}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0$, $\frac{\partial^3 u_\pm}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = 0$.

На рис. 2, 3 приведены графики вещественных (сплошная линия) и мнимых (пунктирная линия) частей амплитуд смещения поверхности при условии свободного смещения краев разлома на частоте $\bar{\omega} = 2$. Рисунок 2 соответствует следующим значениям для подложки: $h = 3$, $\nu = 0,25$, $\mu = 1,58$. Вариант более мягкого основания иллюстрирует рис. 3, здесь выбраны $\nu = 0,125$, $\mu = 0,67$ при той же безразмерной толщине слоя.

Рассмотрены условия непрерывности перемещений и перерезывающих сил, а также равенства нулю изгибающих моментов

$$u_+|_{x_1=0} = u_-|_{x_1=0}, -D_+ \frac{\partial^3 u_+}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = -D_- \frac{\partial^3 u_-}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0}, -D_{\pm} \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0.$$

Рисунки 4, 5 соответствуют этим граничным условиям: на рис. 4 представлены результаты для более жесткого основания ($\nu=0,25, \mu=1,58$), на рис. 5 – более мягкого ($\nu=0,125, \mu=0,67$), в обоих случаях принято $k=0,5$.

Приведенные графики демонстрируют зависимость колебаний поверхности системы от свойств пластин покрытия и основания. Для более жесткого основания амплитуды смещений после прохождения через разлом тем меньше, чем жестче левая пластина. Волновые поля для пластин разной жесткости значительно отличаются, разница между амплитудами волновых полей справа и слева тем больше, чем контрастнее свойства пластин. Более мягкое основание меняет картину смещений, нарушая периодический характер графика и зависимости амплитуд от жесткости пластин. Снижение частоты вибрации влечет за собой уменьшение амплитуды смещений левой пластины по сравнению с правой, и влияние свойств пластин становится менее выраженным.

Сравнение с численными результатами реализации метода решения скалярной задачи, основанного на преобразовании ее дифференциального оператора [22, 23], показало их совпадение.

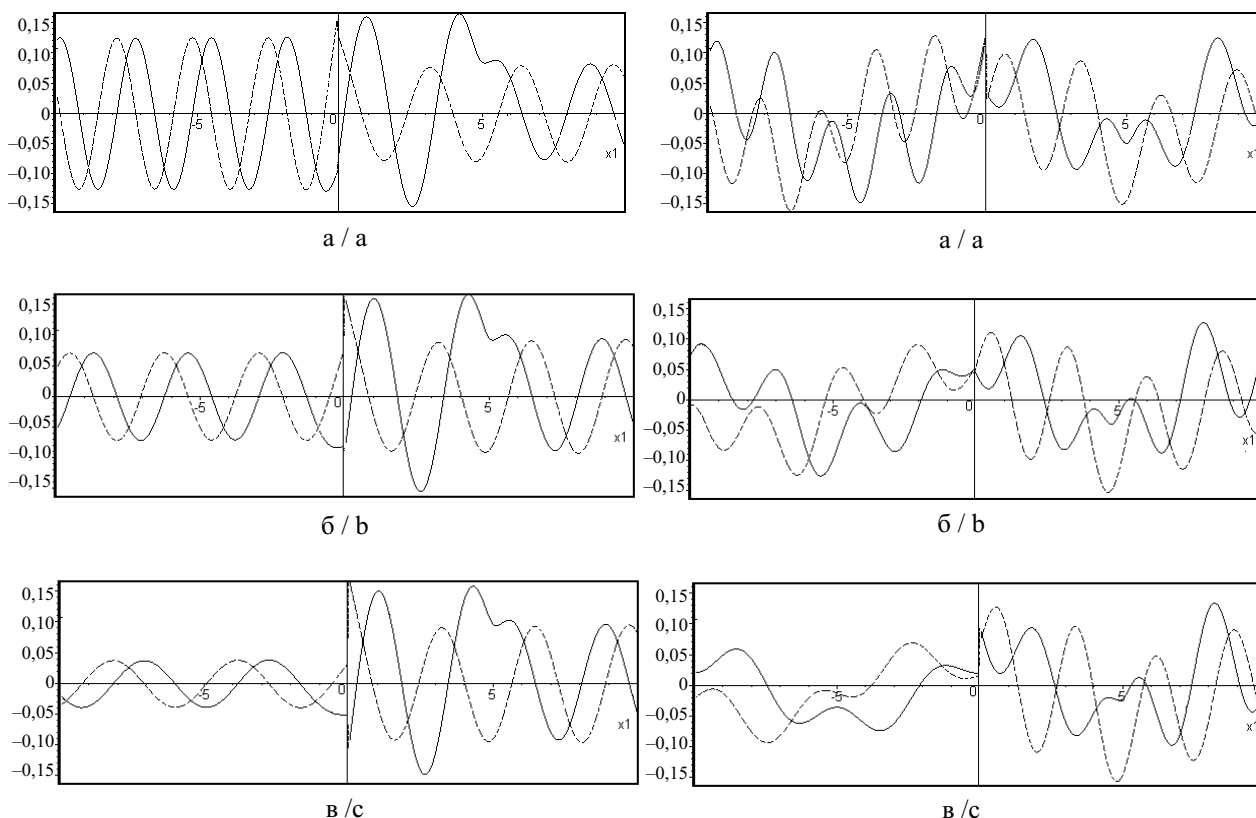


Рис. 2. Вещественные и мнимые части амплитуд перемещений поверхности при свободном смещении пластин на стыке (для подложки $\nu=0,25, \mu=1,58$) / Fig. 2. Real and imaginary parts of the amplitudes of displacements of the surface under the condition of free displacement of the plates at the junction (for the base $\nu=0.25, \mu=1.58$)

Рис. 3. Вещественные и мнимые части амплитуд перемещений поверхности при свободном смещении пластин на стыке (для подложки $\nu=0,125, \mu=0,67$) / Fig. 3. Real and imaginary parts of the amplitudes of displacements of the surface under the condition of free displacement of the plates at the junction (for the base $\nu=0.125, \mu=0.67$)

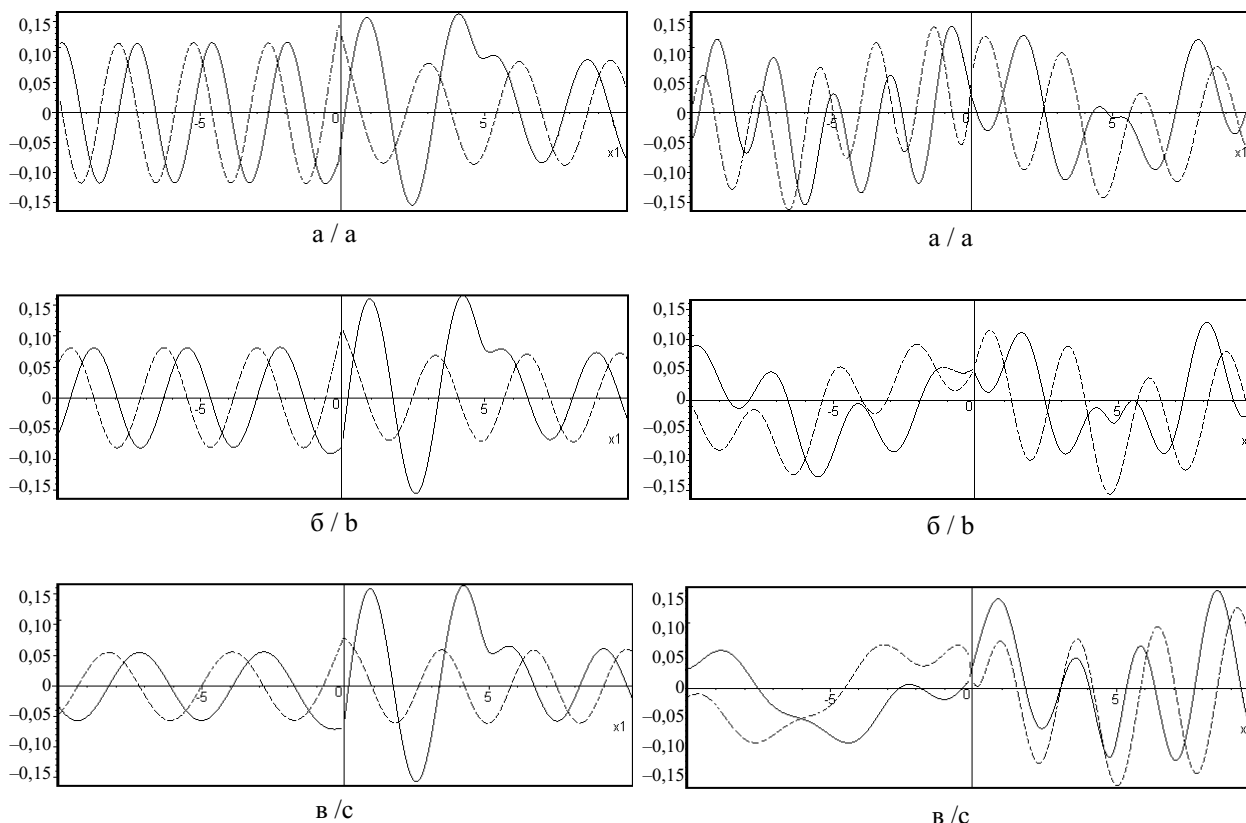


Рис. 4. Вещественные и мнимые части амплитуд смещений поверхности для шарнирного опирания при непрерывности перемещений и перерезывающих сил (для подложки $\nu=0,25, \mu= 1,58$) / Fig. 4. Real and imaginary parts of the displacement amplitudes of the surface for hinged support with continuity of displacements and shear forces (for the base $\nu=0.25, \mu= 1.58$)

Рис. 5. Вещественные и мнимые части амплитуд смещений поверхности для шарнирного опирания при непрерывности перемещений и перерезывающих сил (для подложки $\nu = 0,125, \mu = 0,67$) / Fig. 5. Real and imaginary parts of the displacement amplitudes of the surface for hinged support with continuity of displacements and shear forces (for the base $\nu = 0.125, \mu = 0.67$)

Заключение

Разработан и реализован аналитико-численный метод решения граничных задач о вибрации упругой среды с покрытием, моделируемым протяженными пластинами. Реализован численный алгоритм для случая локализованного нагружения нормальным усилием поверхности одной части покрытия. Факторизационный метод позволяет исследовать характер распространения гармонического сигнала в описанной структуре для разнотипных и однотипных пластин при различных условиях контакта и свойствах подложки.

Рассмотренный в работе подход может быть распространен на задачи для слоистых подложек с плоскими интерфейсными дефектами. Его можно использовать для получения контрольных данных и проверки результатов расчетов, полученных на основе технически более сложного топологического метода, используемого для блочных конфигураций среды.

Список источников

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. Пелех Б.Л., Максимук И.М., Коровайчук А.В. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наукова думка, 1988. 280 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: URSS, 2009. 635 с.

4. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press, 1998. 226 p.
5. *Chandrashekhara K.* Theory of Plates. Himayat Nagar: Universities Press, 2001. 410 p.
6. *Leissa W.* Vibration of Plates. N.Y.: American Institute of Physics, 1993. 353 p.
7. Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
8. *Cheng Z.-Q., Reddy J.N.* Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates // *Proceeding of Royal Society*. 2001. Vol. 458. P. 1499–1518.
9. *Haddad M., Gourinat Y., Charlotte M.* Equivalence theory applied to anisotropic thin plates // *Scientific Research. Engineering*. 2011. Vol. 3, № 7. P. 669–679.
10. *Alinia Y., Beheshti A., Guler M.A., El-Borgi S., Polycarpou A.A.* Sliding contact analysis of functionally graded coating/substrate system // *Mechanics of Materials*. 2016. № 94. P. 142–155.
11. *Alinia Y., Hosseini-Nasab M., Guler M.A.* The sliding contact problem for an orthotropic coating bonded to an isotropic substrate // *European J. of Mechanics - A/Solids*. 2018. № 70. P. 156–171.
12. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Block elements and analytical solutions of boundary-value problems for sets of differential equations // *Doklady Physics*. 2014. Vol. 59, № 1. P. 30–34.
13. *Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V.* Properties of “started” earthquakes // *Doklady Physics*. 2016. Vol. 61, № 4. P. 188–191.
14. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
15. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
16. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
17. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
18. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 749 с.
19. *Noble B.* Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. N.Y.: Pergamon Press, 1958. 246 p.
20. *Babeshko V.A., Babeshko O.M.* Factorization formulas for some meromorphic matrix functions // *Doklady Mathematics*. 2004. Vol. 70, № 3. P. 963–965.
21. *Лилиенберг Д.А.* Закономерности и механизмы современной геодинамики морфоструктур Крыма, Кавказа и Каспия // *Проблемы геоморфологии и геологии Кавказа и Предкавказья : материалы XXIV пленума геоморфологической комиссии РАН*. Краснодар: КубГУ, 2001. С. 45–72.
22. *Колесников М.Н., Телятников И.С.* К методам исследования разломов в условиях вибрационных воздействий // *Науч. журн. КубГАУ*. 2016. № 7. С. 647–659. URL: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/33.pdf> (дата обращения: 20.05.2022).
23. *Колесников М.Н., Телятников И.С.* О методах изучения динамики контактирующих литосферных структур // *Экол. вестн. науч. центров ЧЭС*. 2017. № 4 (1). С. 50–61.

References

1. *Alexandrov V.M., Mkhitaryan S.M.* Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. Moscow: Nauka Publ.; 1983. 487 p. (In Russ.).
2. *Pelexh B.L., Maksimuk I.M., Korovaichuk A.V.* Contact problems for layered structural elements and bodies with coatings. Kyiv: Naukova dumka Publ.; 1988. 280 p. (In Russ.).
3. *Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. Moscow: URSS Publ.; 2009. 635 p. (In Russ.).
4. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego: Academic Press; 1998. 226 p.
5. *Chandrashekhara K.* Theory of Plates. Himayat Nagar: Universities Press; 2001. 410 p.
6. *Leissa W.* Vibration of Plates. New York: American Institute of Physics Press; 1993. 353 p.
7. *Vorovich I.I., Alexandrov V.M., eds.* Mechanics of contact interactions. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2001. 672 p. (In Russ.).
8. *Cheng Z.-Q., Reddy J.N.* Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates. *Proceeding of Royal Society*. 2001;458:1499-1518.
9. *Haddad M., Gourinat Y., Charlotte M.* Equivalence theory applied to anisotropic thin plates. *Scientific Research. Engineering*. 2011;3(7):669-679.
10. *Alinia Y., Beheshti A., Guler M.A., El-Borgi S., Polycarpou A.A.* Sliding contact analysis of functionally graded coating/substrate system. *Mechanics of Materials*. 2016;(94):142-155.

11. Alinia Y., Hosseini-Nasab M., Guler M.A. The sliding contact problem for an orthotropic coating bonded to an isotropic substrate. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2018;(70):156-171.
12. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block elements and analytical solutions of boundary-value problems for sets of differential equations. *Doklady Physics*. 2014;59(1):30-34.
13. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. Properties of “started” earthquakes. *Doklady Physics*. 2016;61(4):188-191.
14. Volmir A.S. *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1972. 432 p. (In Russ.).
15. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains*. Moscow: Nauka Publ.; 1979. 319 p. (In Russ.).
16. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. *The dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media*. Moscow: Nauchnyi mir Publ.; 1999. 246 p. (In Russ.).
17. Goldenveizer A.L. *Theory of elastic thin shells*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. 512 p. (In Russ.).
18. Lavrentev M.A., Shabat B.V. *Methods of the theory of function of complex variable*. Moscow: Nauka Publ.; 1973. 749 p. (In Russ.).
19. Noble B. *Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*. New York: Pergamon Press; 1958. 246 p.
20. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Factorization formulas for some meromorphic matrix functions. *Doklady Mathematics*. 2004;70(3):963-965.
21. Lilienberg D.A. Patterns and mechanisms of modern geodynamics of the morphostructures of the Crimea, the Caucasus and the Caspian. *Problems of geomorphology and geology of the Caucasus and Ciscaucasia. Proceedings of the XXIV Plenum of the Geomorphological Commission of the Russian Academy of Sciences*. Krasnodar: KubSU Press; 2001:45-72. (In Russ.).
22. Kolesnikov M.N., Telyatnikov I.S. To the research methods of faults under the vibration impacts. *Scientific Journal of KubSAU*. 2016;(7):647-659. Available from: <http://ej.kubagro.ru/2016/07/pdf/33.pdf> [Accessed 20th May 2022]. (In Russ.).
23. Kolesnikov M.N., Telyatnikov I.S. About method of studying the dynamics of contacting lithospheric structures. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov ChES = Ecological Bulletin of Scientific Centers of the BSEC*. 2017;(4):50-61. (In Russ.).

Информация об авторах

М.Н. Колесников – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник.

А.В. Павлова – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования.

И.С. Телятников – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник.

Information about the authors

M.N. Kolesnikov - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Researcher.

A.V. Pavlova - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor of the Department of Mathematical Modeling.

I.S. Telyatnikov - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Researcher.

*Статья поступила в редакцию 11.07.2022; одобрена после рецензирования 22.08.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 11.07.2022; approved after reviewing 22.08.2022; accepted for publication 15.11.2022.*

Научная статья

УДК 532.5, 556

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-42-54

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О ТЕЧЕНИИ В КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ

Наталья Михайловна Полякова

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

nmzhukova@sfedu.ru

Аннотация. Построено решение начально-краевой задачи для системы двух квазилинейных гиперболических уравнений, описывающей вращательно симметричное безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости в бесконечной цилиндрической области (труба, кровеносный сосуд). Считается, что боковая поверхность области – свободная (мягкая) граница, на которой выполнено кинематическое условие. Динамическое условие на границе моделируется некоторым конститутивным соотношением – зависимостью давления P от площади сечения S цилиндрической области. Для исследования течения использована асимптотическая модель, построенная в работе на основе теории мелкой воды. При конструировании решения начально-краевой, а также начальной и краевой задач для системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка использован метод годографа на основе закона сохранения. Для исследования выбран вариант полиномиального конститутивного соотношения: $P \sim S^{2\beta}$ ($\beta > 0$). В случае начальной задачи с данными в начальный момент времени указана функция Римана – Грина, позволяющая сконструировать неявное аналитическое решение, и приведен численный алгоритм построения явного решения исходной задачи. Основное внимание фокусируется на частном случае $P \sim S^2$, для которого все необходимые для построения решения формулы записываются в явном виде. При $P \sim S^2$ для начально-краевой задачи рассмотрено несколько вариантов начальных и краевых условий, которые позволяют детально проследить эволюцию решения. Приведены численные расчеты, демонстрирующие движение ударных волн и волновых фронтов. Полученные результаты на практике можно использовать для описания течения в кровеносных сосудах, а также как надежные тесты для проверки вычислительных алгоритмов, предназначенных для решения подобных задач, в частности систем квазилинейных гиперболических уравнений.

Ключевые слова: квазилинейные гиперболические уравнения, начально-краевая задача, сильные и слабые разрывы, течение крови

Для цитирования: Полякова Н.М. Начально-краевая задача о течении в кровеносном сосуде // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 42–54.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE FLOW IN A BLOOD VESSEL

Natalia M. Polyakova

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

nmzhukova@sfedu.ru

Abstract. The solution of the initial boundary value problem for a system of two quasi-linear hyperbolic equations, which describes a rotationally symmetric vortex-free flow of a viscous incompressible fluid in an infinite cylindrical domain (pipe, blood vessel) is constructed. It is assumed that the side surface of the domain is a free (soft, compliant) boundary on which the kinematic condition is set. The dynamic condition at the boundary is

© Полякова Н.М., 2022

modeled by some constitutive relation – the dependence of the pressure P on the cross-sectional area S of the cylindrical domain. To study the flow an asymptotic model based on the shallow water theory is used. When constructing the solution of the initial-boundary (as well as initial and boundary) problem for a system of two quasi-linear partial differential equations of the first order, the hodograph method based on the conservation law is used. A variant of the polynomial constitutive relation is chosen for the study: $P \sim S^{2\beta}$ ($\beta > 0$). In the case of the initial data problem which specified at the initial time the Riemann-Green function, allowing to construct an implicit analytical solution, and an algorithm (numerical) for constructing an explicit solution of the original problem are given. The main attention is focused on the special case $P \sim S^2$, for which all the formulas necessary to construct a solution are written in explicit form. For $P \sim S^2$, several variants of conditions (initial and boundary value) are considered for the initial boundary value problem, which allow us to trace the evolution of the solution in detail. Numerical calculations demonstrating the motion of shock waves and wave fronts are given. The results obtained, in practice, can be used to describe flows in blood vessels, as well as reliable tests for testing computational algorithms intended to solve such problems, in particular, systems of quasi-linear hyperbolic equations.

Keywords: quasi-linear hyperbolic equations, initial boundary value problem, strong and weak discontinuities, blood flow

For citation: Polyakova N.M. Initial Boundary Value Problem of the Flow in a Blood Vessel. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):42-54. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Моделированию течения крови в крупных кровеносных сосудах (артерии) посвящено значительное количество работ [1–5]. Теоретические, экспериментальные и клинические принципы течения крови отражены, в частности, в монографиях [6, 7]. Одна из простейших и популярных моделей представляет собой систему двух квазилинейных уравнений гиперболического типа. По-видимому, впервые такая модель, построенная при помощи метода осреднения, предложена в [1] и затем существенно развита и исследована многими авторами. Заметим, что практически такая же модель построена в [6, с. 72, 73] на основе феноменологических соображений. Наиболее полно способ построения модели методом осреднения представлен в работе [2], в которой, помимо прочего, проведен анализ гиперболических уравнений, даны численные схемы их решений и имеются результаты расчетов. Следует сказать, что в работах [1–5] одна из самых важных проблем методов осреднения – замыкание уравнений – решается крайне спорно. При выводе уравнения движения использован коррекционный коэффициент, связывающий квадрат средней скорости со средним квадратом скорости, необоснованно считающийся постоянным.

В предлагаемой работе применен иной, отличный от метода осреднения, способ конструирования уравнений – лагранжев подход теории мелкой воды. Для безвихревого течения жидкости построена асимптотическая модель. При помощи разложения по малому параметру (относительный размер сосуда) получено точное решение для функции тока с последующим проектированием решения на боковую поверхность области.

Другой важной проблемой моделирования, возникающей как для модели осреднения, так и для предлагаемой модели, является выбор конститутивного соотношения, связывающего давление P и площадь S сечения сосуда, – динамического условия на границе области. Как правило, зависимость $P = P(S)$ выбирается на основе полуэмпирических гипотез [1–6]. Наиболее часто используется полиномиальная зависимость: $P \sim S^{2\beta}$ ($\beta > 0$).

Очевидно, что с точки зрения гидродинамики вращательно симметричное течение в кровеносном сосуде представляет собой течение в некоторой цилиндрической области (труба, струя). Боковую границу цилиндрической области (стенка трубы) можно считать, например, свободной (мягкая, податливая) и задавать на границе кинематические и динамические условия. Именно такому случаю и соответствует задание $P = P(S)$ в качестве динамического условия. Можно также учитывать поверхностное натяжение на свободной границе, что более приемлемо при рассмотрении струйных течений. Более реалистично рассматривать упругие или вязкоупругие стенки трубы. Такие варианты моделей [6, 8–10] являются существенно более сложными (вместо алгебраической зависимости $P = P(S)$ возникают некоторые дифференциальные уравнения), их исследование возможно только численными методами и в представленной работе

не рассматриваются. В связи с другими моделями упомянем [11], в которой приведен обзор моделей, а также [12], где рассмотрена модель, учитывающая наличие источников. Заметим, что во всех моделях течение жидкости предполагается сравнительно медленным. Задача о стационарном турбулентном течении в гофрированной трубе, стенки которой имеют податливые (мягкие) участки, рассмотрена, например, в [13].

С математической точки зрения представленные результаты являются описанием метода построения решения начальной, краевой и начально-краевой задач для системы двух уравнений гиперболического типа. Предлагаемый метод решения (вариант метода годографа на основе закона сохранения [14, 15]) представляет собой численно-аналитический метод, который выгодно отличается от прямых численных методов, применяемых, например, в [1–8] непосредственно к решению задачи о течении крови по сосудам. Следует сказать, что в [1–8] большое внимание уделяется теоретическому качественному анализу свойств гиперболических уравнений, хотя полное решение, аналогичное приведенным, например, в [14] для иных задач, описываемых гиперболическими уравнениями, отсутствует.

В представленной работе выбрана модель с конститутивным соотношением $P \sim S^2$, что позволило существенно уменьшить громоздкость приводимых результатов, не искажая общей схемы построения решения и описания метода. Более того, указанный выбор позволил расщепить систему двух квазилинейных уравнений на отдельные, хорошо известные и исследованные уравнения Хопфа, которые связаны между собой лишь начальными данными. Это, в частности, дало возможность сравнить результаты, имеющиеся для уравнения Хопфа, с представленными в работе решениями и убедиться в эффективности предлагаемого метода.

Постановка задачи

Для моделирования вращательно симметричного течения идеальной несжимаемой жидкости в бесконечной цилиндрической области \mathbb{C} используем уравнения Эйлера, записанные в безразмерных переменных в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , полагая отсутствующей азимутальную компоненту скорости

$$(ru)_r + (rw)_z = 0, u_t + uu_r + wu_z = -p_r, w_t + uw_r + ww_z = -p_z, \quad (1)$$
$$\mathbb{C} = \{(r, z): 0 \leq r \leq R(z, t), -\infty < z < +\infty\}.$$

Здесь u, v, w – радиальная, азимутальная ($v = 0$), осевая компоненты скорости течения $\mathbf{v} = (u, v, w)$; p – давление; \mathbb{C} – область, в которой происходит течение; $r = R(z, t)$ – уравнение боковой поверхности области \mathbb{C} .

Боковую поверхность считаем свободной границей жидкости, на которой выполнено кинематическое

$$R_t + wR_z = u, \quad r = R(z, t) \quad (2)$$

и динамическое условия. Последнее при отсутствии вязкости и поверхностного натяжения соответствует равенству на границе давления жидкости p и давления окружающей внешней среды P

$$p = P, \quad r = R(z, t). \quad (3)$$

На оси $r = 0$ цилиндрической вращательно симметричной области \mathbb{C} выполнены естественные условия

$$u = 0, \quad w_r = 0, \quad r = 0. \quad (4)$$

Предположение о безвихревом характере течения влечет требование обращения в нуль вихря скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{v}, \quad \text{rot}_r \mathbf{v} = 0, \quad \text{rot}_\theta \mathbf{v} = u_z - w_r = 0, \quad \text{rot}_z \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Для полной постановки задачи следует добавить начальные условия, которые будут поставлены далее при решении конкретных задач.

Основная цель работы – построение асимптотического варианта задачи (1)–(5) с учетом различия характерных размеров области \mathbb{C} и нахождение решения для различных начальных, краевых и начально-краевых условий.

Заметим, что использование для описания течения вязкой жидкости уравнений Эйлера (1) взамен уравнений Навье – Стокса связано лишь с целью упрощения изложения. При построении асимптотической модели показано, что члены уравнений Навье – Стокса, связанные с учетом вязкости, исчезают.

Асимптотическая модель

При конструировании асимптотической модели используем лагранжев подход, применяемый для построения уравнений типа мелкой воды. Считая, что течение происходит в цилиндрической области, характерный радиус которой много меньше характерного размера в осевом направлении, определяем малый параметр ε , характеризующий соотношение размеров области. Решение исходной задачи (1)–(5) разыскиваем в виде рядов по параметру ε с последующим проектированием уравнений на границу области [16, с. 32–39]. Ключевую роль при построении асимптотической модели играет уравнение (5). Требование безвихревого характера течения после замен $r \rightarrow \varepsilon r$, $u \rightarrow \varepsilon u$, ($\varepsilon \rightarrow 0$) и введения функции тока ψ : $ru = -\psi_z$, $rw = \psi_r$ с учетом соотношений (4) приводит к задаче

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \psi|_{r=0} = 0. \quad (6)$$

Поиск решения недоопределенной (не хватает краевого условия) задачи (6), которое возможно лишь с точностью до некоторой произвольной функции, в виде формального ряда по степеням ε^2 приводит к соотношению $\psi(r, z, t) = (1/2)r^2 F(z, t) + O(\varepsilon^2)$, где $F(z, t)$ – произвольная функция. Радиальная и осевая скорости, вычисленные при помощи функции тока ψ с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$, имеют вид

$$u(r, z, t) = -\frac{1}{2} r F_z(z, t) + O(\varepsilon^2), \quad w(r, z, t) = F(z, t) + O(\varepsilon^2). \quad (7)$$

В принципе, соотношения (7) строятся в виде бесконечных рядов и могут быть записаны с любой точностью. При этом такие ряды содержат только одну неизвестную функцию $F(z, t)$ и ее всевозможные производные.

Для определения в соотношениях (7) функции $F(z, t)$ используем краевые условия (2), (3) на свободной границе $r = R(z, t)$. Дифференцируя (3) по z , получим $P_z - p_r(R, z, t)R_z - p_z(R, z, t) = 0$. Заменяя $p_r(R, z, t)R_z$, $p_z(R, z, t)$ при помощи уравнений (1), имеем

$$P_z + \varepsilon^2 R_z \frac{DU}{Dt} + \frac{DW}{Dt} = 0. \quad (8)$$

Здесь $U(z, t) = u(R, z, t)$, $W(z, t) = w(R, z, t)$, т. е. компоненты скорости на границе $r = R(z, t)$, с учетом (7) записываются в виде

$$U(z, t) = -\frac{1}{2} R F_z + O(\varepsilon^2), \quad W(z, t) = F + O(\varepsilon^2). \quad (9)$$

$DU/Dt = U_t + WU_z$, $DW/Dt = W_t + WW_z$ – материальные производные на границе, определяемые с учетом условия (2) [17, с. 148–151].

Используя соотношения (9) для подстановки в кинематическое (2) и динамическое (8) условия и сохраняя лишь члены порядка $O(1)$, получим асимптотическую модель типа классической мелкой воды [16, с. 36], которую записываем в консервативной форме

$$S_t + (SW)_z = 0, \quad S = R^2, \quad (10)$$

$$W_t + \left(\frac{1}{2} W^2 \right)_z + P_z = 0, \quad W = F. \quad (11)$$

Здесь S – площадь сечения цилиндрической области с точностью до множителя π , функция W при $\varepsilon \rightarrow 0$ совпадает с функцией F с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$.

Уравнения (10), (11) дополняем конститутивным соотношением – зависимостью давления внешней среды от радиуса цилиндрической области

$$P = P(S). \quad (12)$$

Система квазилинейных уравнений (10)–(12) формально совпадает со многими моделями течения крови, полученными на основе метода осреднения [1, 2, 5]. Однако модель на основе теории мелкой воды является более гибкой в том смысле, что позволяет определить скорость течения жидкости внутри кровеносного сосуда при помощи (7) и значения $F(z, t) = W(z, t)$ на границе, что, конечно же, невозможно при использовании модели на основе метода осреднения.

Построение решения

Система квазилинейных уравнений (10), (11) для различных конститутивных соотношений $P = P(S)$ достаточно широко исследована численными и аналитическими (качественно) методами, в частности в [1–5], где, помимо построения решения, обсуждаются также различные варианты зависимости $P = P(S)$. Сравнительно часто используется полиномиальная зависимость

$$P(S) = \frac{S^{2\beta}}{2\beta}, \quad \beta > 0, \quad (13)$$

где β – некоторая константа (масштабный множитель для давления задан равным единице). Наиболее часто считают, что $\beta = 1/4$.

Для построения решения задачи (10), (11), (13) используем метод годографа, основанный на законе сохранения, впервые предложенный в [15], а затем модифицированный и развитый в [14]. Систему уравнений (10), (11) записываем при помощи инвариантов Римана $R^1(z, t)$, $R^2(z, t)$

$$R_t^1 + \lambda^1 R_z^1 = 0, \quad R_t^2 + \lambda^2 R_z^2 = 0, \quad (14)$$

где $\lambda^1(R^1, R^2)$, $\lambda^2(R^1, R^2)$ – характеристические направления.

Уравнения (14) дополняем условиями

$$R^1(z, t)|_\Gamma = R_0^1(\tau), \quad R^2(z, t)|_\Gamma = R_0^2(\tau), \quad (15)$$

$$\Gamma = \{(z, t): z = z(\tau), t = t(\tau)\}, \quad (16)$$

где Γ – кусочно-гладкая ориентированная линия, параметризованная при помощи параметра τ ; $R_0^1(\tau)$, $R_0^2(\tau)$ – заданные на Γ функции.

В случае (13) связь инвариантов Римана с исходными переменными и функции $\lambda^1(R^1, R^2)$, $\lambda^2(R^1, R^2)$ определяются соотношениями [2, 4]

$$R^1 = W - \frac{S^\beta}{\beta} < R^2 = W + \frac{S^\beta}{\beta}, \quad (17)$$

$$W = \frac{1}{2}(R^1 + R^2), \quad S^\beta = \frac{\beta}{2}(R^2 - R^1), \quad (18)$$

$$\lambda^{1,2} = \frac{1 \pm \beta}{2} R^1 + \frac{1 \mp \beta}{2} R^2. \quad (19)$$

На самом деле и в общем случае $P = P(S)$ можно указать связь инвариантов Римана с исходными переменными W , S , подобную (17). Однако крайне затруднительно определить явный вид обратных зависимостей вида (18) и связи (19) (явные выражения для $\lambda^{1,2}(R^1, R^2)$), играющих важную роль в методе годографа.

Для построения неявного двухпараметрического решения задачи (14)–(16) следует рассмотреть закон сохранения: $\varphi_t(R^1, R^2) + \psi_z(R^1, R^2) = 0$, выполнить дифференцирование, с учетом (14) получить уравнения для функций φ , ψ : $\psi_{R^1} = \lambda^1 \varphi_{R^1}$, $\psi_{R^2} = \lambda^2 \varphi_{R^2}$ и, используя условие разрешимости уравнений, получить задачи для определения φ , ψ . Опуская подробности (детальные построения см. в [14]), укажем, что неявное решение, зависящее от двух параметров: a , b , а также функции $t = t(a, b)$, $z = z(a, b)$, необходимые для сопоставления переменных (z, t) параметрам (a, b) , записываются в форме

$$R^1(z, t) = R_0^1(b), \quad R^2(z, t) = R_0^2(b), \quad 2t(a, b) = t(a) + t(b) - \int_{\Gamma_{ab}} (\psi^t dt - \varphi^t dz), \quad (20)$$

$$2z(a, b) = z(a) + z(b) - \int_{\Gamma_{ab}} (\psi^z dt - \varphi^z dz), \quad (21)$$

где $z(a)$, $z(b)$, $t(a)$, $t(b)$ – координаты и моменты времени на кривой Γ , соответствующие значениям параметров a , b ; Γ_{ab} – часть линии Γ с направлением ориентации от параметра a до b .

Функция φ^t является решением линейной задачи

$$\varphi_{R^1 R^2}^t + A^t \varphi_{R^1}^t + B^t \varphi_{R^2}^t = 0, \quad (22)$$

$$(\psi^t - \lambda^1 \varphi^t)|_{R^1=r^1} = 1, \quad r^1 = R_0^1(b), \quad (\psi^t - \lambda^2 \varphi^t)|_{R^2=r^2} = -1, \quad r^2 = R_0^2(a),$$

$$A^t = \frac{\lambda_{R^2}^1}{\lambda^1 - \lambda^2}, \quad B^t = \frac{\lambda_{R^1}^2}{\lambda^1 - \lambda^2}. \quad (23)$$

Для определения функции ψ^t достаточно проинтегрировать одно из уравнений: $\psi_{R^1} = \lambda^1 \varphi_{R^1}$, $\psi_{R^2} = \lambda^2 \varphi_{R^2}$.

Аналогичным образом находятся функции φ^z , ψ^z . Задача для их определения формально записывается путем использования в соотношениях (22), (23) взаимозамен $t \leftrightarrow z$, $(\mp \varphi) \leftrightarrow (\pm \psi)$, $\lambda^{1,2} \leftrightarrow 1/\lambda^{1,2}$.

В [14] показано, что решение задачи (22) тесно связано с построением явного выражения для функции Римана – Грина линейного уравнения в частных производных второго порядка. В случае (13), (19), вычисляя A^t , B^t при помощи (23) и решая задачу (22) [14, с. 24–26, 32, 33], опуская громоздкие выкладки, получаем

$$\varphi^t(R^1, R^2|r^1, r^2) = \frac{{}_2F_1(\alpha, 1-\alpha; 1; x)}{\beta(r^2-r^1)^\alpha(R^2-R^1)^{1-\alpha}}, \quad x = \frac{(R^1-r^1)(R^2-r^2)}{(R^1-R^2)(r^1-r^2)}, \quad \alpha = \frac{1+\beta}{2\beta}. \quad (24)$$

Здесь ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса; для функции φ^t указаны как основные аргументы R^1 , R^2 , так и параметры r^1 , r^2 .

В случае, когда в соотношении (20) или (21) для функций $t(a, b)$, $z(a, b)$ конкретизированы подинтегральные выражения, т. е. в явной форме решена задача (22), имеется способ построения явного решения исходной задачи, по крайней мере численный.

Для определенности считаем, что функция $t(a, b)$ построена в явной форме. Тогда на линиях уровня функции $t(a, b)$ строим явное решение. Пусть имеется параметризованная линия уровня

$$t(a(\tau), b(\tau)) = t_*, \quad (25)$$

где τ – параметр; t_* – момент времени, идентифицирующий линию уровня.

Дифференцируя (25) по параметру τ , получаем задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$a_\tau = -t_b(a, b), \quad b_\tau = t_a(a, b), \quad a|_{\tau=0} = a_*, \quad b|_{\tau=0} = b_*, \quad (26)$$

где (a_*, b_*) – точка на изолинии (25), соответствующая параметру $\tau = 0$, которая может быть найдена путем построения изолиний (25) на плоскости (a, b) для различных t_* .

При отсутствии явного выражения (21) координата $Z(\tau) = z(a(\tau), b(\tau))$ на линии (25) вычисляется путем решения задачи $Z_\tau = J(a, b)$, $Z|_{\tau=0} = Z_*$, где

$$J(a, b) = (\lambda^2(r^1, r^2) - \lambda^1(r^1, r^2))t_a t_b, \quad r^1 = r^1(b), \quad r^2 = r^2(a).$$

Окончательно однопараметрическое (параметр τ) явное решение задачи на линии уровня (25) записываем в виде

$$R^1(z, t_*) = R_0^1(b(\tau)), \quad R^2(z, t_*) = R_0^2(a(\tau)), \quad t_* = t(a_*, b_*), \quad z = Z(\tau) = z(a(\tau), b(\tau)). \quad (27)$$

Детально способ конструирования явного решения исходной задачи (14)–(16) и определения начальных значений a_* , b_* , Z_* описан в [14, с. 48–51].

Специальное конститутивное соотношение

С математической точки зрения (и не только) особый интерес представляет частный вариант конститутивного соотношения (13) при $\beta = 1$

$$P(S) = \frac{1}{2} S^2. \quad (28)$$

Дело в том, что в этом случае практически все формулы, необходимые для построения решения, записываются в явной форме. Опуская промежуточные вычисления, приводим функции, которые не зависят от переменных R^1, R^2

$$\varphi^t = \frac{2}{r^2 - r^1}, \quad \psi^t = \frac{r^1 + r^2}{r^2 - r^1}, \quad \varphi^z = \frac{r^1 + r^2}{r^2 - r^1}, \quad \psi^z = \frac{2r^1 r^2}{r^2 - r^1}. \quad (29)$$

Они с помощью (20), (21) позволяют в зависимости от контура Γ_{ab} определить $t(a, b)$, $z(a, b)$.

Начальная и краевая задачи. Формулы (20), (21) получены интегрированием по замкнутому контуру PQM интегрального аналога $\oint_{PQM} (\psi dt - \varphi dz) = 0$ закона сохранения $\varphi_t + \psi_x = 0$ с учетом условий (22). Контур PQM состоит из характеристики QM , на которой сохраняется инвариант R^1 , характеристики PM , на которой сохраняется инвариант R^2 , и линии $PQ = \Gamma_{ab}$, на которой определены начальные данные (15). Характеристики разных семейств QM, PM пересекаются в точке $M = (t, z)$ (см. более подробно: [14, с. 20–30; 15]).

Условие пересечения характеристик различных семейств в некоторой точке $M = (t, z)$ является важным (в противном случае решение не существует) и влияет на выбор контура Γ_{ab} . Для начальной (данные при $t = 0$) и краевой (данные при $z = 0$) задач с учетом $R^2 > R^1$ (см. (17)) выбор контура очевиден. Приведем соотношения для $t(a, b)$, $z(a, b)$ в случае начальной и краевой задач.

(i) Контур $\Gamma_{ab} = \Gamma_1 = \{z \in [a, b], t = 0, b > a\}$ соответствует начальной задаче. Тогда

$$t(a, b) = \frac{b-a}{r^2(a) - r^1(b)}, \quad z(a, b) = \frac{br^2(a) - ar^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}. \quad (30)$$

(ii) Контур $\Gamma_{ab} = \Gamma_2 = \{t \in [a, b], z = 0, a > b\}$ соответствует краевой задаче. Тогда

$$t(a, b) = \frac{ar^2(a) - br^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}, \quad z(a, b) = \frac{(a-b)r^1(b)r^2(a)}{r^2(a) - r^1(b)}. \quad (31)$$

Обратим внимание на то, что соотношения (30), (31) можно получить и без использования функций (29) и соотношений (20), (21). Дело в том, что при выполнении (28) система (14)

представляет собой два не связанных между собой уравнения Хопфа $R_t^1 + R^1 R_z^1 = 0$, $R_t^2 + R^2 R_z^2 = 0$, ($\lambda^1 = R^1$, $\lambda^2 = R^2$) (связь осуществляется через условия (15), (16)). В частности, для того чтобы получить соотношения (30), достаточно записать решение уравнений Хопфа, используя метод характеристик: $z = r^1(b)t + b$, $z = r^2(a)t + a$, $R^1 = r^1(b) = R_0^1(b)$, $R^2 = r^2(a) = R_0^2(a)$. Определяя t , z , получим (30). Аналогично получаем (31), решая краевую задачу при помощи метода характеристик: $z = r^1(b)(t - b)$, $z = r^2(a)(t - a)$, $R^1 = r^1(b) = R_0^1(b)$, $R^2 = r^2(a) = R_0^2(a)$.

Начально-краевая задача. Функции $R_0^1(\tau)$, $R_0^2(\tau)$ заданы на линии $\Gamma = \{0 \leq z < \infty, 0 \leq t < \infty\}$. При выборе контура $\Gamma_{ab} \subset \Gamma$ возможны три варианта.

Во-первых, $\Gamma_1 = \Gamma_{ab} \subset \{0 \leq z < \infty\}$, что в точности, включая формулы (30), совпадает с начальной задачей (i). Во-вторых, $\Gamma_2 = \Gamma_{ab} \subset \{0 \leq t < \infty\}$, что в точности, включая формулы (31), совпадает с краевой задачей (ii). Наконец, специфичный именно для начально-краевой задачи кусочно-гладкий контур Γ_3 , для которого точка a принадлежит оси координат $z = 0$, а точка b находится на оси $t = 0$.

(iii) Контур $\Gamma_{ab} = \Gamma_3 = \{z \in [0, b], t = 0, b > 0\} \cup \{t \in [0, a], z = 0, a > 0\}$.

$$t(a, b) = \frac{b + ar^2(a)}{r^2(a) - r^1(b)}, \quad z(a, b) = r^2(a) \frac{b + ar^1(b)}{r^2(a) - r^1(b)}. \quad (32)$$

Вновь, как и ранее, соотношения (32) можно получить, решая относительно t и z систему $z = r^1(b)t + b$, $z = r^2(a)(t - a)$.

В фиксированные моменты времени $t > 0$ область $z \geq 0$ разбивается на три подобласти (рис. 1, 2) с движущимися границами $z_1(t)$, $z_2(t)$ между подобластями:

(i) = $\{z_2(t) \leq z \leq \infty\}$, (ii) = $\{0 \leq z \leq z_1(t)\}$, (iii) = $\{z_1(t) \leq z \leq z_2(t)\}$.

В зависимости от начально-краевых данных поведение границ может быть различным. В случае несогласованных начальных и краевых данных на границах между зонами $z = z_1(t)$, $z = z_2(t)$ могут быть как сильные разрывы – ударные волны (рис. 1), так и слабые разрывы – волновой фронт (рис. 2) [18, с. 129–135]. В принципе, возможна ситуация, при которой возникают и автомодельные решения – волны разрежения (не представлено на рисунках).

Ударные волны. Рассматриваем ситуацию, когда в начальный момент времени $t = 0$ имеется сильный разрыв. Уравнения (10), (11) записаны в консервативной форме и являются естественными законами сохранения массы и импульса, что позволяет получить условия Ренкина – Гюгонио на разрыве (приведены для случая (28)) $D[S] = [WS]$; $D[W] = (1/2)[W^2 + S^2]$; $D = dz(t)/dt$, где $[f] = f(z(t) + 0, t) - f(z(t) - 0, t)$ – величина разрыва функции f на линии разрыва $z = z(t)$; $f(z(t) + 0, t)$, $f(z(t) - 0, t)$ – значения функций справа и слева от линии разрыва; D – скорость движения линии разрыва.

С учетом соотношений (17), (18) (при $\beta = 1$) комбинация исходных условий на разрыве приводит к соотношениям для инвариантов Римана $D[R^k] = (1/2)[(R^k)^2]$. Таким образом, уравнения (14), условия на разрыве и разрывные начальные данные – это задача о распаде произвольного разрыва, начального или возникшего в процессе эволюции, известная как задача Римана для уравнения Хопфа.

Очевидно, что поведение линии разрыва, например, границы $z_1(t)$ между областями (ii), (iii) определяется задачей Коши для ОДУ, когда в начальный момент $t = 0$ имеется сильный разрыв начальных данных (начальные и краевые условия не согласованы)

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = D_1(t), \quad z_1(0) = 0, \quad R^2 = const, \quad D_1 = \frac{1}{2}(R^1(z_1(t) + 0, t) + R^1(z_1(t) - 0, t)). \quad (33)$$

Аналогично записывается задача для определения границы $z_2(t)$ между областями (iii), (i) – достаточно произвести взаимозамену индексов $1 \leftrightarrow 2$.

На рис. 1 для конкретных начальных данных продемонстрирована ситуация, когда границы между подобластями являются ударными волнами.

Напомним, что для некоторых начальных данных ударные волны могут возникать и как результат опрокидывания профиля решения в процессе эволюции решения (не только в начальный момент времени).

Волновые фронты. Для начально-краевой задачи начальные данные в точке $z = 0$, $t = 0$ могут, оставаясь непрерывными, иметь слабые разрывы (разрывы производных). Достаточно типичной является ситуация, когда краевые условия при $z = 0$ зависят от t , а начальные условия

при $t = 0$ являются постоянными (или наоборот). Способы построения решения подобных задач, известных как волновой фронт (см., в частности, рис. 2), изложены, например, в [18, с. 129–135].

Ввиду того что для данной задачи система уравнений (10), (11), (28) распадается на два независимых уравнения Хопфа, достаточно рассмотреть начально-краевую задачу

$$V_t + VV_z = 0, \quad V|_{t \geq 0, z=0} = G(t), \quad G_t(0) \neq 0, \quad V|_{z \geq 0, t=0} = G(0). \quad (34)$$

Здесь $V(z, t)$ – либо $R^1(z, t)$, либо $R^2(z, t)$; $G(t)$ – либо $R_0^1(t)$, либо $R_0^2(t)$.

Таким образом, предполагается, что в точке $t = 0, z = 0$ имеется разрыв производной по t (и по z в силу уравнения). Как известно, слабые разрывы движутся по характеристике и не могут ни возникнуть, ни исчезнуть в процессе эволюции. Следуя [18, с. 129–135], ищем решение задачи (34) в виде

$$V(z, t) = V_0 + V_1(z)y + \dots, \quad y \geq 0, \quad V(z, t) = V_0 = G(0) > 0, \quad y \leq 0, \quad y = t - q(z). \quad (35)$$

Осуществляя подстановку (35) в (34), приравнявая члены при одинаковых степенях y и опуская промежуточные построения, получаем $q(z) = z/V_0$ и задачу для транспортного уравнения, описывающего поведение слабого разрыва, $dV_1/dt - V_1^2/V_0^2 = 0, V_1(0) = G_t(0)$, решение которой легко строится. Опуская промежуточные соотношения, приведем лишь окончательный результат. Разрыв производной определяется соотношением $[V_z] = V_z|_{y=+0} - V_z|_{y=-0} = (t - t_0)^{-1}, t_0 = V_0/G_z(0)$ и движется по характеристике $z = V_0 t$ ($y = 0$). С течением времени t происходит рост величины разрыва по модулю и стремление к бесконечности при $t \rightarrow t_0$ (градиентная катастрофа). Напомним, что в точке $z_0 = V_0 t_0$, в принципе, возможно образование сильного разрыва.

Результаты расчетов

На рис. 1, 2 представлены результаты вычислений в случаях двух вариантов данных для начально-краевой задачи – сильного и слабого начального разрыва.

1-й вариант. Ударные волны. Рассматриваем полубесконечную цилиндрическую область (труба, кровеносный сосуд) постоянного сечения S_0 , в которой в начальный момент времени $t = 0$ ($z \geq 0$) с постоянной скоростью $W_0 > 0$ течет жидкость (кровь). На границе $z = 0$ (начало трубы) считается, что сечение трубы такое же, как и при $z \geq 0$, т. е. S_0 , а скорость течения W при $t \geq 0$ гармонически пульсирует с амплитудой ε и круговой частотой Ω .

$$\begin{aligned} S|_{t \geq 0, z=0} &= S_0, \quad W|_{t \geq 0, z=0} = W_0(1 + \varepsilon \cos \Omega t), \\ S|_{z \geq 0, t=0} &= S_0, \quad W|_{z \geq 0, t=0} = W_0, \\ S_0 &= 0,4, \quad W_0 = 1,0, \quad \varepsilon = 0,1, \quad \Omega = 1. \end{aligned} \quad (36)$$

В начальный момент времени $t = 0$ имеется сильный разрыв скорости, величина которого εW_0 . При $t = +0$ возникают два движущихся сильных разрыва инвариантов R^1, R^2 (и, естественно, S, W , см. (17), (18) при $\beta = 1$). Поведение движущегося разрыва $z_1(t)$ определяется путем решения задачи (33). Для определения закона движения разрыва инварианта R^1 численно интегрируется задача Коши

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{2}(r^1(0) + r^1(a(z_1, t))), \quad z_1(0) = 0, \quad (37)$$

где $r^1(a) = (W_0(1 + \varepsilon \cos \Omega a) - S_0) - \text{задано при помощи краевого условия (36)}$.

На каждом шаге интегрирования задачи Коши функция $a(z_1, t)$ вычисляется как решение алгебраического уравнения для характеристики $z_1 = r^1(a)(t - a)$, приходящей с оси $z = 0$ на линию разрыва $z = z_1(t)$.

Аналогично находится закон движения $z_2(t)$ разрыва инварианта R^2 – достаточно в соотношениях (37) заменить индекс 1 на 2 и $(-S_0)$ на S_0 .

С малой относительной погрешностью ($\approx 5 \cdot 10^{-3}$) в случае (36) имеем $z_1(t) \approx D_1 t, z_2(t) \approx D_2 t, D_1 = 0,65, D_2 = 1,45$. Решение задачи, т.е. функции $R^1(z, t), R^2(z, t), S(z, t), W(z, t)$, в момент $t = 10$ показано на рис. 1.

В момент $t = 10$ сильные разрывы находятся в точках $z_1 \approx 6,5; z_2 \approx 14,5$. Точное решение дают для $z_1(t), z_2(t)$ значения $z_1(10) = 6,4699; z_2(10) = 14,4916$. Решение в области (ii) (при $0 < z_1(t)$) и области (iii) (при $z_1(t) < z < z_2(t)$) получаем, используя (27) и интегрируя задачу Коши (26). В случае области (ii) производные t_a, t_b вычисляем при помощи соотношений (31)

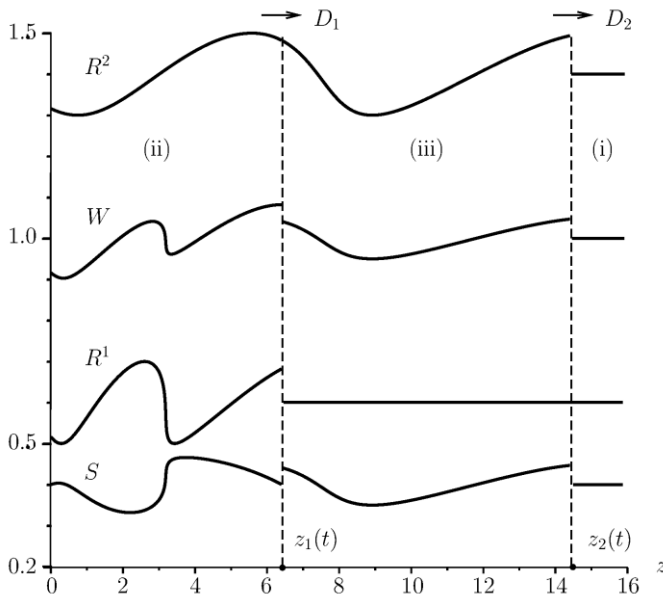


Рис. 1. Ударные волны в момент $t = 10$ для случая (36). $D_1 = 0,65$; $D_2 = 1,45$; $z_1 = 6,470$; $z_2 = 14,492$; $t = 10$; $W_0 = 1$; $S_0 = 0,4$; $\varepsilon = 0,1$ / Fig. 1. Shock waves at time $t=10$ for case (36). $D_1=0.65$; $D_2=1.45$; $z_1=6.470$; $z_2=14.492$; $t=10$; $W_0=1$; $S_0=0.4$; $\varepsilon=0.1$

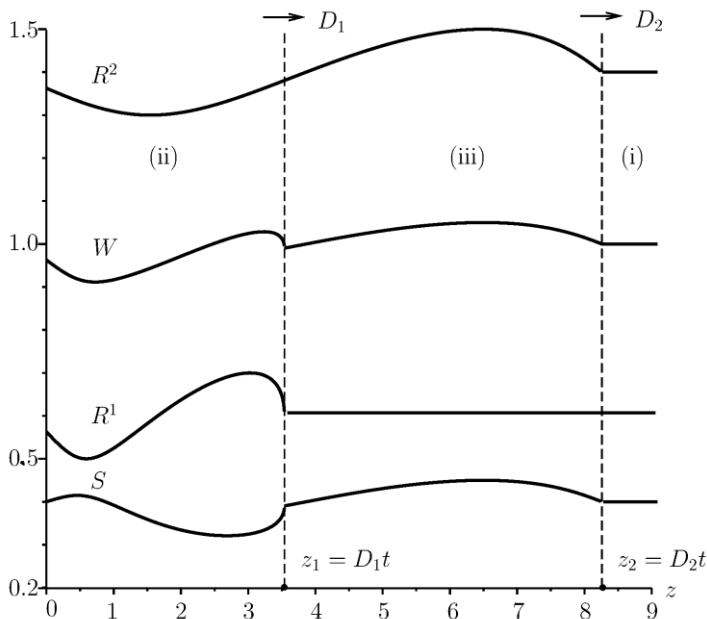


Рис. 2. Волновые фронты в момент $t = 5,9$ для случая (38). $D_1 = 0,6$; $D_2 = 1,4$; $z_1 = 3,54$; $z_2 = 8,26$; $W_0 = 1$; $S_0 = 0,4$; $\varepsilon = 0,1$ / Fig. 2. Wavefronts at time $t = 5.9$ for case (38). $D_1 = 0.6$; $D_2 = 1.4$; $z_1 = 3.54$; $z_2 = 8.26$; $W_0 = 1$; $S_0 = 0.4$; $\varepsilon = 0.1$

для краевой задачи (при $t = 10$ значения $a_* = b_* = 10,0$). В случае области (iii) производные t_a, t_b вычисляем при помощи соотношений (32) для начально-краевой задачи (при $t = 10$ значения $a_* = 5,663$; $b_* = 0,425$). В области (i) (при $z > z_2(t)$) решение строится при помощи соотношений (30). В случае (36) оно остается постоянным при $t > 0$.

В процессе эволюции решения $R^1(z, t), R^2(z, t)$ (и, естественно, $S(z, t), W(z, t)$) возможно опрокидывание профилей функции, что приводит к образованию ударных волн помимо ударной волны, возникающей ввиду разрыва начальных данных при $t = 0$. В частности, для рассматриваемых условий (36) в момент $t_d = 10,382$ в точке $z_d = 3,405$ возникает ударная волна. Это хорошо видно на рис. 1 – в момент $t = 10$ профиль функций в окрестности $z \approx 3,5$ уже близок к разрывному. Расчеты показывают (не приведены), что при дальнейшей эволюции решения возникает серия движущихся ударных волн.

2-й вариант. Волновые фронты. На рис. 2 показано непрерывное решение, соответствующее волновым фронтам.

Начальные данные имеют вид

$$S|_{t \geq 0, z=0} = S_0, \quad (38)$$

$$W|_{t \geq 0, z=0} = W_0(1 + \varepsilon \sin \Omega t),$$

$$S|_{z \geq 0, t=0} = S_0, \quad W|_{z \geq 0, t=0} = W_0,$$

$$S_0 = 0,4, \quad W_0 = 1,0, \quad \varepsilon = 0,1,$$

и отличаются от данных (36) соотношением (38).

В начальный момент $t = 0$ функции непрерывны, но имеется разрыв производной по времени для функции W , величина которого равна $\varepsilon \cdot \Omega W_0$, и соответствующие разрывы производных для инвариантов Римана, имеющие величину $\varepsilon \cdot \Omega W_0$ (разрыв для функции S отсутствует). Способ построения численного решения практически такой же, как и в случае ударных волн. Отличие заключается в том, что нет необходимости решать задачу (37) для определения поведения ударных волн. Волновые фронты движутся по характеристикам $z_1(t) = D_1 t = (W_0 - S_0)t$, $z_2(t) = D_2 t = (W_0 + S_0)t$, $D_1 = 0,6$; $D_2 = 1,4$. В отличие от случая ударных волн, когда $z_1(t), z_2(t)$ определяются численно, соотношения для волновых фронтов являются точными.

На рис. 2 показано решение задачи, т. е. функции $R^1(z, t)$, $R^2(z, t)$, $S(z, t)$, $W(z, t)$, в момент $t = 5,9$. Момент времени, при котором разрыв производной по z , например для функции $R^1(z, t)$, обращается в бесконечность, равен $t_0 = 6$ ($V_0 = W_0 - S_0$, $G_z(0) = \varepsilon\Omega W_0$). При решении задачи Коши (26) в случае области (ii) $a_* = b_* = 5,9$ (при $t = 5,9$), а для области (iii) $a_* = 3,336$, $b_* = 0$ (при $t = 5,9$). Как и в случае ударных волн, в области (i), т. е. при $z > z_2(t)$, решение остается постоянным в течение всего времени эволюции.

Момент времени, при котором разрыв производной по z для функции $R^2(z, t)$ обращается в бесконечность, равен $t_0 = 14$ ($V_0 = W_0 + S_0$, $G_z(0) = \varepsilon\Omega W_0$). Но прежде чем производная функции $R^2(z, t)$ достигнет бесконечности в момент $t = 14$, произойдет опрокидывание профилей функций $R^1(z, t)$, $S(z, t)$, $W(z, t)$ ($R^2(z, t)$ непрерывна). В момент $t = 6$ возникнет ударная волна в точке $z = 3,6$. Естественно, при этом изменится скорость движения ударной волны, которая уже не будет двигаться по характеристике. В момент $t = 14$ аналогичное опрокидывание профиля с образованием ударной волны произойдет и для функции $R^2(z, t)$.

Решения на линиях уровня функции $x(a, b)$. На рис. 1, 2 представлены явные решения, когда на линиях уровня $t(a, b) = t_*$ (см. (25)) определяются функции $R^1(z, t_*)$, $R^2(z, t_*)$, $S(z, t_*)$, $W(z, t_*)$ (см. (27)), позволяющие проследить зависимость решения от z в фиксированный момент времени t_* . Аналогично строится решение на линиях уровня функции $z(a, b) = z_*$. Взамен системы обыкновенных дифференциальных уравнений (26) следует рассматривать систему: $a_\tau = -x_b(a, b)$, $b_\tau = x_a(a, b)$ с соответствующими начальными условиями. Производные $x_b(a, b)$, $x_a(a, b)$ вычисляются в зависимости от областей (i) – (iii) при помощи соотношений (30)–(32). Заметим, что производные x_a, x_b удовлетворяют соотношениям $x_a = \lambda^1(r^1(a, b), r^2(a, b))t_a$, $x_b = \lambda^2(r^1(a, b), r^2(a, b))t_b$ [14, с. 47, формула (9.6)]. В частности, это означает, что при решении задач достаточно иметь информацию лишь об одной функции – $t(a, b)$ или $x(a, b)$.

В некотором смысле, особенно при проведении экспериментов, решение на линии уровня $z_* = z(a, b)$ является более важным, чем на $t_* = t(a, b)$. Такое решение позволяет получать информацию об изменении характеристик течения ($S(z_*, t)$, $W(z_*, t)$) в зависимости от времени t в фиксированной точке области $z = z_*$ (место расположения измерительного прибора).

Опуская подробный ход построения решения, который не отличается от описанного в предыдущих разделах, приведем результаты расчетов для начальных данных (36), соответствующих ударным волнам (рис. 3).

Выбираем $z_* = 3,405$, т. е. точку в окрестности образования ударной волны в области (ii) (см. соответствующую область на рис. 1). На интервале времени $0 \leq t < t_2$ в точке $z = z_*$ (расположение датчика, измерительного прибора) фиксируется область (i), фактически течение с постоянной скоростью (рис. 1, 3). Моменты t_2 и t_1 определены соотношениями: $t_2 = z_*/D_1 = 2,352$, $D_2 \approx 1,448$, $t_1 = z_*/D_1 = 5,300$, $D_1 \approx 0,642$. В момент $t = t_2$ в точке z_* фиксируется разрыв инварианта R^2 – граница между областями (i) и (iii) (рис. 1, 3).

На интервале времени $t_2 < t < t_1$ мимо датчика в точке $z = z_*$ проходит область (ii). В момент $t = t_1$ в точке z_* фиксируется разрыв инварианта R^1 – граница между областями (ii) и (iii) (рис. 1, 3). Начиная с момента $t = t_2$, в точке z_* фиксируется решение из области (ii).

Напомним, что в момент $t_d = 10,382$ в точке $z_d = 3,405$ возникает опрокидывание профиля и образуется ударная волна (рис. 1, окрестность точки $z_d = 3,405$). Скорость движения ударной волны определяется решением задачи (33) для инварианта Римана R^1 . Движение ударной волны осуществляется примерно с постоянной скоростью $D_0 \approx 0,569$ по закону $z(t) \approx z_d + D_0(t - t_d)$. Величина $D_0 < D_1 \approx 0,642$. Это означает, что разрыв, сформировавшийся в процессе эволюции, не догонит разрыва инварианта R^1 , который имелся в начальный момент времени и движется по закону $z_1(t) \approx D_1 t$.

Легко показать, что решение $R^1(z_*, t)$, $R^2(z_*, t)$, $S(z_*, t)$, $W(z_*, t)$ в области (ii), т. е., начиная с $t = t_1$ (рис. 1), является периодическим по времени с периодом $T = 2\pi/\Omega$ ($\Omega = 1$). Действительно, используя для области (ii) соотношения (31), (27) и периодичность функций $r^1(b)$, $r^2(a)$ по аргументам для начальных данных (36), имеем $z(a + T, b + T) = z(a, b)$, $t(a + T, b + T) = t(a, b) + T$, $R^1(z_*, t) = R_0^1(b) = R_0^1(b + T) = R^1(z_*, t + T)$, $R^2(z_*, t) = R_0^2(a) = R_0^2(a + T) = R^2(z_*, t + T)$.

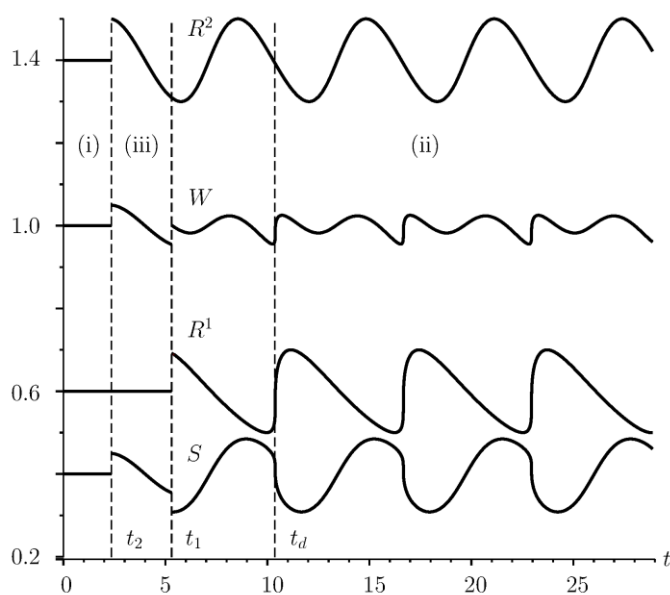


Рис. 3. Зависимость значений функций R^1, R^2, S, W от времени t при фиксированном $z = z_* = 3,405$; $t_1 = 5,300, t_2 = 2,352$ – моменты, в которые регистрируются разрывы решения. Случай ударных волн / Fig. 3. Dependence of the values of the functions R^1, R^2, S, W on time t at a fixed $z = z_* = 3.405$. $t_1 = 5.300, t_2 = 2.352$ - moments at which discontinuities of the solution are registered. The case of shock waves

Таким образом, в точке $z_d = 3,405$ в моменты времени $t = t_d + 2\pi m, m = 0, 1, \dots$, возникает серия ударных волн, генерируемых гармоническими периодическими краевыми условиями (36) при $z = 0$ (рис. 3).

Во избежание недоразумений подчеркнем, что результаты, представленные на рис. 3, соответствуют $z_* = 3,405$. В этом случае хорошо видны нелинейные искажения инварианта Римана $R^1(z_*, t)$, но практически незаметны нелинейные отклонения от периодичности для инварианта $R^2(z_*, t)$. С течением времени профиль функции $R^2(z, t)$ также опрокинется и возникнут ударные волны. Для того чтобы датчик регистрировал ударную волну, возникающую в процессе решения, его следует размещать в точке $z_* \geq z_d$, так как в противном случае сформировавшаяся ударная волна не достигнет датчика. Если разместить датчик в точке $z \approx 25$, то график функции $R^2(z_*, t)$ ($S(z_*, t), W(z_*, t)$) будет иметь такую же пилообразную структуру, как и график функции $R^1(z_*, t)$.

Заключение

Представленные результаты показывают, что течение жидкости (кровь) по трубе (кровеносный сосуд) с мягкими свободными стенками определяется в основном нелинейными эффектами переноса. В выбранной модели вязкие свойства жидкости не оказывают влияния на поведение решения. Понятно, что использование более сложных моделей, например с учетом вязкости, приведет лишь к сглаживанию решений, в частности, сильных разрывов. Сравнение результатов с имеющимися экспериментальными данными [7, с. 300–308] подтверждает сделанное утверждение. Конечно, при сравнении следует помнить, что рассматривалось частное конститутивное соотношение (28), а не более общее соотношение (13). Заметим, что при использовании соотношения (28), учитывая, что уравнения модели расщепляются на два независимых уравнения Хопфа, возможен иной путь построения решения – непосредственное решение начально-краевой задачи для уравнений Хопфа [18, с. 62–66] и сравнение такого решения с представленными в работе результатами. Решение модельной задачи с использованием функции Римана – Грина (24), которое не приведено ввиду громоздкости, показало, что качественное поведение решения практически не отличается от представленного в работе – имеются ударные волны, волновые фронты и т.п.

Отметим, что представленный способ решения начально-краевой задачи является численно-аналитическим. В многочисленных работах о течении крови в артериях [1–8] задача решается либо качественно, либо прямыми численными методами (конечно-разностные, методы конечных объемов), что приводит к погрешности аппроксимации, к погрешности решения больших систем уравнений, возникающих при аппроксимации, к практически неустраняемым трудностям вычислений в окрестности сильных и слабых разрывов. Напротив, в представленном в работе способе решения точность ограничивается лишь погрешностью решения задачи Коши для ОДУ, которая существенно проще задачи для уравнений в частных производных. Выбор начальных данных в виде (36) и (38) объясняется их типичностью для исходной задачи, простотой представления и трактовки результатов. Без каких-либо изменений, в частности, основных соотношений

(29)–(32), построение решения возможно для случая цилиндрической области с переменным радиусом, в сужающемся кровеносном сосуде, иными начальными данными и т.п.

Практическая применимость представленных результатов достаточно очевидна – возможность моделирования течения крови по кровеносным сосудам различного профиля и с различными условиями начального кровотока. В частности, представленные на рис. 3 результаты являются моделированием контроля пульса и, более того, восстановлением картины течения в кровеносном сосуде, по крайней мере качественно, по результатам отдельных неинвазивных измерений.

Список источников

1. *Barnard A.C.L., Hunt W.A., Timlake W.P., Varley E.A.* Theory of Fluid Flow in Compliant Tubes // *Biophysical J.* 1966. Vol. 6, № 6. P. 717–724. Doi: 10.1016/S0006-3495(66)86690-0.
2. *Canic S., Kim E.H.* Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model of blood flow through compliant axi-symmetric vessels // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2003. Vol. 26. P. 1161–1186. Doi: 10.1002/mma.407.
3. *Anliker M., Rockwell R.L., Ogden E.* Nonlinear Analysis of Flow Pulses and Shock Waves in Arteries. Part I: Derivation and Properties of Mathematical Model // *ZAMP.* 1971. Vol. 22. P. 217–246. Doi: 10.1007/BF01614000.
4. *Formaggia L., Nobile F., Quarteroni A., Veneziani A.* Multiscale Modelling of the Circulatory System: a Preliminary Analysis // *Computing and Visualization in Science.* 1999. Vol. 2, № 2. P. 75–83. Doi: 10.1007/s007910050030.
5. *Canic S., Li T.* Critical thresholds in a quasilinear hyperbolic model of blood flow // *Networks and Heterogeneous Media.* 2009. Vol. 4, № 3. P. 527–536. Doi: 10.3934/nhm.2009.4.527.
6. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
7. *Cardiovascular Fluid Dynamics.* Ed. Bergel D. H. L.; N.Y.: Academic Press, 1972. Vol. 1. 365 p.
8. *Mikelic A., Guidoboni G., Canic S.* Fluid-structure interaction in a pre-stressed tube with thick elastic walls I: the stationary Stokes problem // *Networks and Heterogeneous Media.* 2007. Vol. 2, № 3. P. 397–423. Doi: 10.3934/nhm.2007.2.397.
9. *Волобуев А.Н.* Течение жидкости в трубах с эластичными стенками // *Успехи физ. наук.* 1995. Т. 165, № 2. С. 177–186. Doi: 10.3367/UFNr.0165.199502с.0177.
10. *Кудряшов Н.А., Синельников Д.И., Чернявский И.Л.* Нелинейные эволюционные уравнения для описания возмущений в вязкоэластичной трубке // *Нелинейная динамика.* 2008. Т. 4, № 1. С. 69–86. Doi: 10.20537/nd0801004.
11. *Piccioli F., Bertaglia G., Valiani A., Caleffi V.* Modeling blood flow in networks of viscoelastic vessels with the 1-D augmented fluid-structure interaction system // *J. of Computational Physics.* 2022. Vol. 464. 45 p. Doi: 10.1016/j.jcp.2022.111364.
12. *Свиридова Н.В., Власенко В.Д.* Моделирование гемодинамических процессов сердечно-сосудистой системы на основе данных периферической артериальной пульсации // *Мат. биология и биоинформатика.* 2014. Т. 9, № 1. С. 195–205. Doi: 10.17537/2014.9.195.
13. *Жуков М.Ю., Полякова Н.М., Ширяева Е.В.* Квазистационарное турбулентное течение в цилиндрическом канале с неровными стенками // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.* 2020. № 1. С. 4–10. Doi: 10.18522/1026-2237-2020-1-4-10.
14. *Жуков М.Ю., Ширяева Е.В., Долгих Т.Ф.* Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015. 126 с.
15. *Senashov S.I., Yakhno A.* Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // *SIGMA.* 2012. Vol. 8, № 71. 16 p. Doi: 10.3842/sigma.2012.071.
16. *Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И., Ляпидевский В.Ю., Плотников П.И., Стурова И.В., Букреев В.И., Владимиров В.А.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 385 с.
17. *Жуков М.Ю., Ширяева Е.В., Полякова Н.М.* Моделирование испарения капли жидкости. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2015. 208 с.
18. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

References

1. *Barnard A. C. L., Hunt W. A., Timlake W. P., Varley E. A.* Theory of Fluid Flow in Compliant Tubes. *Biophysical Journal.* 1966;6(6):717-724, doi: 10.1016/S0006-3495(66)86690-0.

2. Canic S., Kim E. H. Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model of blood flow through compliant axi-symmetric vessels. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2003;26:1161-1186, doi: 10.1002/mma.407.
3. Anliker M., Rockwell R. L., Ogden E. Nonlinear Analysis of Flow Pulses and Shock Waves in Arteries. Part I: Derivation and Properties of Mathematical Model. *ZAMP.* 1971;22:217-246, doi: 10.1007/BF01614000.
4. Formaggia L., Nobile F., Quarteroni A., Veneziani A. Multiscale Modelling of the Circulatory System: a Preliminary Analysis. *Computing and Visualization in Science.* 1999;2(2):75-83, doi: 10.1007/s007910050030.
5. Canic S., Li T. Critical thresholds in a quasilinear hyperbolic model of blood flow. *Networks and Heterogeneous Media.* 2009;4(3):527-536, doi: 10.3934/nhm.2009.4.527.
6. Pedli T. *The fluid mechanics of large blood vessels.* Moscow: Mir Publ.; 1983. 400 p. (In Russ.).
7. Bergel D. H., ed. *Cardiovascular Fluid Dynamics.* London; New York: Academic Press; 1972;1. 365 p.
8. Mikelic A., Guidoboni G., Canic S. Fluid-structure interaction in a pre-stressed tube with thick elastic walls I: the stationary Stokes problem. *Networks and Heterogeneous Media.* 2007;2(3):397-423, doi: 10.3934/nhm.2007.2.397.
9. Volobuev A. N. Fluid flow in tubes with elastic walls. *Uspekhi fiz. nauk = Physics-Uspekhi.* 1995;165(2):177-186, doi: 10.3367/UFNr.0165.199502c.0177. (In Russ.).
10. Kudryashov N. A., Sinel'shchikov D. I., Chernyavskiy I. L. Nonlinear evolution equations for description of perturbations in a viscoelastic tube. *Nelineinaya dinamika = Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2008;4(1):69-86, doi: 10.20537/nd0801004. (In Russ.).
11. Piccioli F., Bertaglia G., Valiani A., Caleffi V. Modeling blood flow in networks of viscoelastic vessels with the 1-D augmented fluid-structure interaction system. *Journal of Computational Physics.* 2022;464:45, doi: 10.1016/j.jcp.2022.111364.
12. Sviridova N. V., Vlasenko V. D. Modelling of hemodynamic processes in cardiovascular system on the base of peripheral arterial pulsation data. *Mat. Biologiya i Bioinformatika = Mathematical Biology and Bioinformatics.* 2014;9(1):195-205, doi: 10.17537/2014.9.195. (In Russ.).
13. Zhukov M. Yu., Polyakova N. M., Shiryaeva E. V. Quasi-stationary turbulent flow in cylinder channel with irregular walls. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2020;(1):4-10, doi: 10.18522/1026-2237-2020-1-4-10. (In Russ.).
14. Zhukov M. Yu., Shiryaeva E. V., Dolgikh T. F. *Hodograph method for solving hyperbolic and elliptic quasilinear equations.* Rostov-on-Don: Southern Federal University Press; 2015. 126 p. (In Russ.).
15. Senashov S. I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity. *SIGMA.* 2012;8(071). 16 p., doi: 10.3842/sigma.2012.071.
16. Ovsyannikov L. V., Makarenko N. I., Nalimov V. I., Lyapidevsky V. Yu., Plotnikov P. I., Sturova I. V., Bukreev V. I., Vladimirov V. A. *Nonlinear problems of theoretical and internal waves.* Novosibirsk: Nauka Publ.; 1985. 319 p. (In Russ.).
17. Zhukov M. Yu., Shiryaeva E. V., Polyakova N. M. *Modeling the evaporation of a liquid drop.* Rostov-on-Don: Southern Federal University Press; 2015. 208 p. (In Russ.).
18. Whitham G. B. *Linear and nonlinear waves.* Moscow: Mir Publ.; 1977. 622 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Н.М. Полякова – ассистент, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the author

N.M. Polyakova - Assistant, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 01.08.2022; одобрена после рецензирования 14.08.2022; принята к публикации 14.11.2022.
The article was submitted 01.08.2022; approved after reviewing 14.08.2022; accepted for publication 14.11.2022.

Научная статья

УДК 514.764.2

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-55-64

ЛОКАЛЬНО ИЗОМЕТРИЧНЫЕ РИМАНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Владимир Александрович Попов

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия

vlapopov@gmail.com

Аннотация. Изучаются классы локально изометричных римановых аналитических многообразий. Приводится обобщение понятия полноты. Рассматриваются алгебра Ли \mathfrak{g} всех векторных полей Киллинга риманова аналитического многообразия, ее стационарная подалгебра \mathfrak{h} , односвязная группа Ли G , соответствующая алгебре Ли \mathfrak{g} , и подгруппа H , соответствующая подалгебре Ли \mathfrak{h} . В случае отсутствия центра в алгебре \mathfrak{g} вводится понятие квазиполного (сжатого) многообразия. Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо, не допускает нетривиальных, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга, локальных изометрий в себя. Основное свойство такого многообразия состоит в том, что оно единственно в классе всех локально изометричных римановых аналитических многообразий, и любая локально заданная изометрия этого многообразия M в себя аналитически продолжается до изометрии $f: M \approx M$.

Для произвольного класса локально изометричных римановых аналитических многообразий приводится определение псевдополного многообразия, которое является полным в случае, если полное многообразие в данном классе существует. Риманово аналитическое односвязное многообразие M называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами: M непродолжаемо, не существует локально изометрического накрывающего отображения $f: M \rightarrow N$, где N – односвязное риманово аналитическое многообразие, а $f(M)$ – открытое подмножество в N , не равное N .

Ключевые слова: риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли, группа Ли, векторное поле Киллинга, аналитическое продолжение

Для цитирования: Попов В.А. Локально изометричные римановы аналитические пространства // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 55–64.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

LOCALLY ISOMETRIC RIEMANNIAN ANALITIC SPACES

Vladimir A. Popov

Financial University under the Government of Russian Federation, Moscow, Russia

vlapopov@gmail.com

Abstract. Classes of locally isometric Riemannian analytic manifolds are studied. A generalization of the concept of completeness is given. We consider the Lie algebra \mathfrak{g} of all Killing vector fields of a Riemannian analytic manifold, its stationary subalgebra \mathfrak{h} the simply connected Lie group G corresponding to the Lie algebra \mathfrak{g} , and the subgroup H corresponding to the Lie subalgebra \mathfrak{h} . In the absence of a center in the algebra \mathfrak{g} the concept of a quasi-complete (compressed) manifold is introduced. An oriented Riemannian analytic manifold whose vector

© Попов В.А., 2022

field algebra has zero center is said to be quasi-complete if it is non-extendable and does not admit non-trivial orientation-preserving and all Killing vector fields local isometries to itself. The main property of such a manifold is that it is unique in the class of all locally isometric Riemannian analytic manifolds, and any locally given isometry of this manifold M into itself can be analytically extended to an isometry $f: M \approx M$.

For an arbitrary class of locally isometric Riemannian analytic manifolds, a definition of a pseudocomplete manifold is given, which is complete if a complete manifold exists in the given class. A Riemannian analytic simply connected manifold M is called pseudocomplete if it has the following properties. M is non-extendable. There is no locally isometric covering map $f: M \rightarrow N$, where N is a simply connected Riemannian analytic manifold and $f(M)$ is an open subset of N not equal to N .

Keywords: Riemannian analytic manifold, Lie algebra, Lie group, Killing vector field, analytic extension

For citation: Popov V.A. Locally Isometric Riemannian Analytic Spaces. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):55-64. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Уже достаточно давно научно обоснована криволинейность нашего пространства. Его геометрия не подчиняется законам евклидовой геометрии, а определяется общим понятием римановой метрики. Однако по локальным свойствам окружающего пространства очень сложно представить глобальное устройство Вселенной в целом. Преобладает мнение, высказанное великим ученым А. Пуанкаре, что по аналогии с поверхностью Земли Вселенная представляет из себя замкнутое (компактное) пространство, обладающее свойством односвязности (т.е. любая (криволинейная) окружность ограничивает «криволинейный» круг на этом пространстве). А. Пуанкаре выдвинул гипотезу, согласно которой замкнутое односвязное трехмерное пространство топологически эквивалентно трехмерной сфере, что приводит к некоторой аналогии строения Вселенной со строением поверхности Земли. В недавнее время чисто математическая гипотеза Пуанкаре была окончательно доказана российским математиком Г.Я. Перельманом.

Помимо топологического подхода возможен аналитический подход к изучению глобальных свойств риманова пространства. Этот подход связан с тем, что риманов тензор задается аналитическими функциями, которые имеют свойство однозначного аналитического продолжения. Рассмотрим риманово аналитическое многообразие M и шар $U \subset M$ малого радиуса с центром в некоторой точке $x_0 \in M$. Под аналитическим продолжением локально заданной метрики будем подразумевать любое риманово аналитическое многообразие N такое, что существует аналитическая изометрия $\varphi: U \rightarrow N$. Поставим задачу найти наиболее естественное аналитическое продолжение данной метрики. Естественным требованием является свойство непродолжаемости искомого многообразия, введенного ещё в классических монографиях [1, 2]. Но непродолжаемые многообразия могут быть весьма неестественными. Например, односвязная накрывающая правой полуплоскости с выколотыми точками $(\frac{1}{n}; \frac{k}{n})$, $k, n \in \mathbb{N}$.

В исследованиях по геометрии римановых пространств в целом, как правило, существенным требованием является полнота рассматриваемого многообразия. Для полного односвязного риманова аналитического многообразия любая изометрия $\varphi: U \rightarrow V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi: M \rightarrow M$ [1].

Однако в общем случае шар U риманова аналитического многообразия нельзя изометрически вложить в полное риманово аналитическое многообразие, т. е., вообще говоря, локально заданная риманова метрика аналитически не продолжается до метрики полного риманова многообразия. Возникает вопрос об обобщении понятия полноты. Естественным обобщением такого рода является непродолжаемость риманова аналитического многообразия. Но непродолжаемые многообразия могут быть весьма неестественными.

Зададимся вопросом, можно ли по заданным локальным свойствам римановой аналитической метрики, т.е. метрики, заданной на малом шаре U , построить риманово аналитическое многообразие M , содержащее U в качестве открытого подмножества и допускающее аналитическое про-

должение локальных изометрий до изометрий всего многообразия. То есть любая изометрия $\varphi: U \rightarrow V$ между двумя связными открытыми подмножествами $U \subset M, V \subset M$ аналитически продолжается до изометрии $\varphi: M \rightarrow M$. Непреодолимым препятствием для такого продолжения является следующий факт. Пусть \mathfrak{g} – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии M и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – её стационарная подалгебра для фиксированной точки $p \in M, X \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow X(p) = 0$. Пусть G – односвязная подгруппа, порождённая алгеброй \mathfrak{g} , H – её подгруппа, порождённая подалгеброй \mathfrak{h} . Пусть G действует на односвязном многообразии M , тогда орбита фиксированной точки $p \in M$ является подмногообразием, изометричным фактор-группе G/H . Но фактор-группа G/H является многообразием лишь в случае замкнутости подгруппы H в G , а это выполняется не всегда.

Целью данной работы является определение псевдополного многообразия, являющегося наиболее полным аналитическим продолжением произвольной локально заданной римановой аналитической метрики. Изучается её аналитическое продолжение. Рассмотрим случаи вполне неоднородной метрики и метрики, для которой алгебра Ли всех векторных полей Киллинга не имеет центра. В этих случаях дадим определение квазиполного многообразия M , обладающего свойством единственности и продолжаемости всех локальных изометрий $f: U \rightarrow V$, где U, V – связные открытые подмножества многообразия M , до изометрии $f: M \rightarrow M$. Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга, локальных изометрий в себя.

Дадим определение псевдополного многообразия, приводящее к наиболее полному продолжению локально заданной метрики и применимое к произвольной локально заданной метрике. Риманово аналитическое односвязное ориентированное многообразие M называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами: M непродолжаемо, не существует локально изометрического, сохраняющего ориентацию, накрывающего отображения $f: M \rightarrow N$, где N – односвязное риманово аналитическое многообразие, а $f(M)$ – открытое подмножество в N , не равное N . Среди псевдополных многообразий выделим «наиболее симметричные» правильные псевдополные многообразия.

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т.е. метрики, не допускающей никаких движений (полей Киллинга) [3, 4]. В этом случае удаётся определить так называемое квазиполное многообразие, обладающее свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики [4]. Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра [5, 6]. Такое многообразие M обладает свойством максимально возможной симметрии, т.е. любая изометрия $f: U \rightarrow V$ между связными открытыми подмножествами многообразия M аналитически продолжается до изометрии $f: M \rightarrow M$. Однако квазиполное многообразие обладает не только тем недостатком, что оно определено не для произвольной локально заданной метрики, но оно в определённом смысле не является самым полным. Поэтому далее для произвольной локально заданной римановой метрики мы приведём понятие псевдополного многообразия, исследуем его свойства и связь с квазиполным многообразием.

Основные определения. Вполне неоднородные метрики

Класс всех локально изометричных римановых аналитических многообразий будем называть также классом многообразий, происходящих из данного ростка риманова аналитического многообразия, а конкретное многообразие из этого класса – аналитическим продолжением данного ростка. Естественным требованием к аналитическому продолжению ростка является непродолжаемость полученного многообразия. Перейдем к точным определениям и формулировкам.

Определение 1. Аналитическим продолжением риманова аналитического многообразия M назовём риманово аналитическое многообразие N такое, что существует аналитическое вложение M в N как собственного открытого подмножества. Многообразие, не допускающее аналитического продолжения, называется непродолжаемым.

Определение 2. Локальной изометрией между двумя римановыми аналитическими многообразиями M и N называется изометрия $\varphi: U \rightarrow V$ между открытыми подмножествами $U \subset M$, $V \subset N$. Многообразия, между которыми существует локальная изометрия, назовём локально изометричными.

Любое векторное поле $X \in \mathfrak{g}$ аналитически продолжается вдоль любой кривой на многообразии M , и тем самым алгебра Ли \mathfrak{g} определяет алгебру Ли \mathfrak{g} векторных полей Киллинга на любом односвязном многообразии N , локально изометричном M . Этот факт верен также для многообразий аффинной связности.

Лемма 1. Пусть M – аналитическое многообразие аффинной связности; X – инфинитезимальное аффинное преобразование, заданное в области $U \subset M$, и пусть $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, такая непрерывная кривая в M , что $\gamma(0) \in U$. Тогда векторное поле X аналитически продолжаемо вдоль γ . Если кривые $\gamma(t)$ и $\delta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(0) = \delta(0)$, $\gamma(1) = \delta(1) = x_1$, гомотопны, то продолжения векторных полей в точку x_1 вдоль этих кривых совпадают.

Доказательство. Предположим, что X аналитически продолжаемо в окрестность любой точки $\gamma(t)$ при $0 \leq t < t_1$. Докажем, что X продолжается и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Пусть V – нормальная окрестность точки q , являющаяся нормальной окрестностью каждой из своих точек [1]. Рассмотрим $t \leq t_1$ такое, что $p = \gamma(t) \in V$.

Векторное поле X порождает локальную однопараметрическую группу изометрий φ_s в окрестности каждой точки $\gamma(t)$, $t < t_1$. Докажем, что для всех достаточно малых значений s локальные изометрии φ_s аналитически продолжаются и в окрестность точки $q = \gamma(t_1)$. Тогда векторное поле скоростей этой локальной группы изометрий и будет аналитическим продолжением векторного поля X в окрестность точки q .

Рассмотрим связное открытое множество V_0 , содержащее точки p и q , замыкание которого также принадлежит V , $\bar{V}_0 \subset V$, $p, q \in V_0$. Рассмотрим малую окрестность $V' \subset V_0$ точки q и соединим точку p отрезком геодезической $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$, с произвольной точкой $q' \in V'$. Пусть $Y = \frac{d\alpha}{dt}(0) \in T_p M$ и $p_s = \varphi_s(p)$, $Y_s = \varphi_s(Y)$. Из точки p_s проведём геодезическую $\beta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, такую, что $\frac{d\beta}{dt}(0) = Y_s$. При достаточно малых значениях s $\beta(t) \in V_0$, $0 \leq t \leq 1$. Положим $\varphi_s(q') = \beta(1)$. Полученное таким образом отображение и есть аналитическое продолжение изометрии φ_s .

Принципиальным является исследование случая вполне неоднородной римановой метрики, т.е. метрики, не допускающей никаких движений (полей Киллинга). Такие метрики изучались в [3]. В работе [4] дается определение квазиполного многообразия, обладающего свойством непродолжаемости и единственности для каждой локально заданной вполне неоднородной метрики.

Определение 3. Риманово аналитическое многообразие называется вполне неоднородным многообразием, если на нём не существует векторных полей Киллинга. Риманову метрику вполне неоднородного многообразия назовём вполне неоднородной метрикой.

По лемме 1 все многообразия, локально изометричные вполне неоднородному многообразию, являются вполне неоднородными.

Определение 4. Вполне неоднородное ориентированное риманово аналитическое многообразие называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных, сохраняющих ориентацию, локальных изометрий в себя.

Приведём основные свойства вполне неоднородных квазиполных многообразий [4]. Для произвольного вполне неоднородного многообразия M рассмотрим множество $S \subset M$ всех неподвижных точек, сохраняющих ориентацию локальных изометрий многообразия M в себя.

Теорема 1. Для произвольного вполне неоднородного риманова аналитического многообразия M' множество $S \subset M'$ является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2. Следовательно, $M' \setminus S$ является связным многообразием.

Теорема 2. Для любого вполне неоднородного риманова аналитического многообразия M' существует локально изометричное ему квазиполное многообразие M и локально изометрическое накрывающее отображение $f: M' \setminus S \rightarrow M$. Таким образом, квазиполное многообразие обладает свойством единственности для каждой вполне неоднородной локально заданной римановой аналитической метрики.

Метрики с нулевым центром алгебры всех векторных полей Киллинга

Определение квазиполного многообразия удаётся обобщить на случай, когда алгебра Ли всех векторных полей Киллинга для заданной локально определённой римановой аналитической метрики не имеет центра. Таковыми являются и многие локально однородные многообразия, в частности, все локально симметрические пространства. Локально однородные многообразия изучались в работах [5, 6].

Определение 5. Ориентированное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли всех векторных полей которого имеет нулевой центр, называется квазиполным, если оно непродолжаемо и не допускает нетривиальных, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга, локальных изометрий в себя.

Исследуем ориентированные римановы аналитические многообразия, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которых не имеет центра, с целью доказать, что каждое такое многообразие локально изометрично квазиполному многообразию, а локально однородное квазиполное многообразие является полным однородным многообразием.

Обозначим через $Z(M)$ псевдогруппу всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий риманова аналитического многообразия M , $\varphi \in Z(M) \Leftrightarrow \forall X \in \mathfrak{g} \varphi(X) = X$.

Лемма 2. Пусть M – риманово аналитическое многообразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга, и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда множество $S \subset M$, состоящее из неподвижных точек всевозможных изометрий $\varphi \in Z(M)$, является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2.

Доказательство. Докажем, что для любого открытого множества $U \subset M$ с компактным замыканием имеется только конечное число локальных изометрий из U в себя, принадлежащих псевдогруппе $Z(M)$. Предположим противное и рассмотрим бесконечную последовательность локальных изометрий $\varphi_i \in Z(M)$, область определения и множество значений которых лежат в U . При доказательстве [4, лемма 3] по бесконечной последовательности локальных изометрий φ_i на некотором открытом множестве $V \subset U$ было построено векторное поле Киллинга X , которое при переходе к подпоследовательности удовлетворяет условию: $\forall t, |t| \leq 1, \forall i \in \mathbb{N}, \exists k(i) \in \mathbb{N}$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i^{k(i)} = \text{Exp}tX$, где $\text{Exp}tX$ – локальная однопараметрическая группа изометрий, порожденная векторным полем X . Следовательно, для любого векторного поля Y на $V \exists i \in \mathbb{N}$ такое, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |(\text{Exp}tX)_* Y - Y| &\leq \left| \varphi_{i*}^{k(i)} Y - Y \right| + \left| (\text{Exp}tX)_* Y - \varphi_{i*}^{k(i)} Y \right| \leq \\ &\leq 0 + \left| Y - (\text{Exp}(-tX)) \varphi_{i*}^{k(i)} Y \right| \leq \frac{1}{2} |(\text{Exp}tX)_* Y - Y|. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall Y \in \mathfrak{g} (\text{Exp}tX)_* Y = Y$, т.е. $[X, Y] = 0$. Но это противоречит отсутствию центра в алгебре \mathfrak{g} .

Полученное противоречие доказывает существование только конечного числа локальных изометрий из U в U , принадлежащих псевдогруппе $Z(M)$. А отсюда, как было показано в [5], уже легко следует тот факт, что множество S является аналитическим подмножеством коразмерности не меньше, чем 2.

В силу леммы 2 многообразие $M \setminus S$ связно.

Лемма 3. Пусть M – риманово аналитическое многообразие, удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга, и алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Тогда существует локально изометрическое накрывающее отображение из $M \setminus S$ в риманово аналитическое многообразие M_1 , также удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга, и псевдогруппа $Z(M_1)$ которого состоит только из тождественного преобразования.

Доказательство. Профакторизуем многообразие $M \setminus S$ по псевдогруппе $Z(M)$. Из доказательства леммы 2 следует, что для каждой точки $x \in M \setminus S$ существует окрестность $U_{1x} \subset M \setminus S$ точки x , которая не допускает нетождественных, сохраняющих ориентацию, локальных изометрий в себя, принадлежащих псевдогруппе $Z(M)$. Это доказывает, что фактор-отображение π , проектирующее многообразие $M \setminus S$ во множество $M_1 = M \setminus S / Z(M)$, является накрывающим

отображением. Значит, для каждой точки $x \in M$ существуют такая ее окрестность $U_x \subset M_1$ и такое открытое множество $V_x \subset \pi^{-1}(U_x)$, что отображение π устанавливает гомеоморфизм между множествами V_x и U_x . Определим риманово скалярное произведение. Сузив, если необходимо, множество $V_x \subset M \setminus S$, будем считать, что V_x является координатной окрестностью точки $y \in \pi^{-1}(U_x) \subset M \setminus S$. Тогда объявим множество $U_x \subset M_1$ координатной окрестностью точки $x \in M_1$. Рассмотрим две такие окрестности: $U_1, U_2 \subset M_1, U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Заметим, что соответствующие множествам U_1, U_2 множества $V_1, V_2 \subset M \setminus S$ могут и не пересекаться. Положим $\pi^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap V_1 = V_{10}, \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) \cap V_2 = V_{20}$. Тогда существует изометрия $\alpha: V_{10} \approx V_{20}$. Пусть ψ_1 и ψ_2 – координатные отображения на V_1 и V_2 соответственно. Тогда $\psi_1 \pi^{-1}$ и $\psi_2 \pi^{-1}$ будут координатными отображениями на U_1 и U_2 .

Пусть $x \in M_1$ – произвольная точка и $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_x M_1$ – произвольные векторы. Рассмотрим какую-нибудь точку $y \in \pi^{-1}(x) \subset M \setminus S$ и векторы $\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1 \in T_y M$ такие, что $\pi_* \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}, \pi_* \mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}$. Определим риманово скалярное произведение $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ равным имеющемуся на $T_x M$ риманову скалярному произведению $\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1 \rangle$. Если взять другую точку $z \in \pi^{-1}(x)$ и векторы $\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2 \in T_z M$ такие, что $\pi_* \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}, \pi_* \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$ такая, что $\varphi(z) = y, \varphi_* \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1, \varphi_* \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}_1$. Следовательно, $\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1 \rangle = \langle \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2 \rangle$. Это доказывает корректность определения римановой метрики на M_1 .

Построенное риманово многообразие M_1 не допускает нетождественных, сохраняющих ориентацию, локальных изометрий, индуцирующих тождественное преобразование на алгебре векторных полей Киллинга \mathfrak{g} . Проекция $\pi: M \setminus S \rightarrow M_1$ является локально изометрическим накрывающим отображением. Остается доказать свойство однозначного продолжения векторных полей Киллинга на M_1 . Рассмотрим векторное поле Киллинга \mathbf{X} , заданное на некотором открытом множестве $U \subset M_1$, и такие открытые множества $U_0 \subset U$ и $V_0 \subset M \setminus S$, что накрывающее отображение π устанавливает изометрию между множествами V_0 и U_0 . Тогда векторное поле $\pi_*^{-1} \mathbf{X}$ однозначно продолжается с множества $V_0 \subset M$ на все многообразие M и задает векторное поле \mathbf{Y} на M . Пусть точки $y, z \in M \setminus S$ таковы, что $\pi(x) = \pi(y)$ и $\pi_* \mathbf{Y}(z) = \pi_* \varphi_* \mathbf{Y}(y)$. Так как $\pi \circ \varphi = \pi$ по определению π , то $\pi_* \circ \varphi_* = \pi_*$. Следовательно, $\pi_* \mathbf{Y}(z) = \pi_* \varphi_* \mathbf{Y}(y) = \pi_* \mathbf{Y}(y)$. Это доказывает, что отображение π однозначно проектирует векторное поле \mathbf{Y} , заданное на M , на векторное поле $\pi_* \mathbf{Y}$, заданное на многообразии M_1 . Полученное векторное поле $\pi_* \mathbf{Y}$ и будет аналитическим продолжением векторного поля \mathbf{X} на все многообразие M_1 .

Теорема 3. Произвольное риманово аналитическое многообразие M , алгебра Ли векторных полей Киллинга которого не имеет центра, локально изометрично квазиполному многообразию.

Доказательство. Рассмотрим произвольное риманово аналитическое многообразие M' , алгебра Ли векторных полей Киллинга которого не имеет центра. Многообразие M_1 , построенное при доказательстве леммы 3, не допускает локальных изометрий в себя, сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга. Тогда квазиполным многообразием M будет некоторое максимальное аналитическое продолжение многообразия M_1 . Будем считать, что все многообразия, которые мы будем рассматривать при доказательстве теоремы, обладают свойством однозначного аналитического продолжения векторных полей Киллинга, т.е. алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого одинакова для всех многообразий и равна \mathfrak{g} . Если M' удовлетворяет этому свойству, то и многообразии M_1 ему удовлетворяет.

Рассмотрим множество Λ , состоящее из аналитических продолжений M_α многообразия M_1 , удовлетворяющих свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и не допускающих локальных изометрий, тождественных на алгебре всех векторных полей Киллинга. Снабдим многообразие M_1 отмеченной точкой и отмеченным репером в отмеченной точке, а образы этой точки и этого репера отметим в многообразиях $M_\alpha \in \Lambda$. Введем на этом множестве следующее отношение порядка: $M_\alpha \leq M_\beta$, если существует изометрическое вложение $i_{\alpha\beta}: M_\alpha \rightarrow M_\beta$, переводящее отмеченную точку в отмеченную и отмеченный репер в отмеченный. В результате Λ становится частично упорядоченным множеством. Рассмотрим произвольное линейно упорядоченное подмножество Δ множества Λ . Построим прямой предел семейства многообразий $M_\alpha \in \Delta$ и отображений $i_{\alpha\beta}$. Получим многообразие M_0 , обладающее следующими свойствами: для любого многообразия $M_\alpha \in \Delta$ существует изометрическое вложение $i_\alpha: M_\alpha \rightarrow M_0$, причем $i_\alpha(M_\alpha) \subset i_\beta(M_\beta)$, если $M_\alpha \leq M_\beta$. $M_0 = \bigcup_{M_\alpha \in \Delta} (M_\alpha)$. Докажем, что $M_0 \in \Lambda$. Произвольное векторное поле \mathbf{X} на мно-

гообразии M_1 при помощи вложений $i_{1\alpha}: M_1 \rightarrow M_\alpha$ и $i_\alpha: M_\alpha \rightarrow M_0$ переносится на многообразии $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$, причем $(i_\alpha \cdot i_{1\alpha})_* \mathbf{X} = (i_\beta \cdot i_{1\beta})_* \mathbf{X}$ на $i_\alpha(M_\alpha) \cap i_\beta(M_\beta)$, а векторное поле Киллинга $(i_\alpha \cdot i_{1\alpha})_* \mathbf{X}$ однозначно продолжается с подмногообразия $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$ на любое подмногообразие $i_\beta(M_\beta) \subset M_0$, $M_\beta \geq M_\alpha$, т.е. на все многообразие M_0 . Таким образом, векторное поле Киллинга, заданное на произвольно малом открытом множестве $U \subset M_0$, однозначно продолжается до векторного поля Киллинга на M_0 .

Рассмотрим теперь локальную изометрию $\varphi \in Z(M_0)$. Пусть точка $x_0 \in M_0$ принадлежит области определения изометрии φ . Тогда точки x_0 и $\varphi(x_0)$ лежат в некотором подмногообразии $i_\alpha(M_\alpha) \subset M_0$. Следовательно, $\varphi \in Z(i_\alpha(M_\alpha))$. Поэтому φ является тождественным преобразованием. Значит, псевдогруппа $Z(M_0)$ состоит только из тождественного преобразования. Итак, для произвольного линейно упорядоченного подмножества $\Delta \subset \Lambda$ мы построили верхнюю грань. По лемме Цорна множество Λ имеет максимальный элемент. Мы утверждаем, что многообразие M , являющееся таким максимальным элементом, будет искомым квазиполным многообразием. Требуется доказать, что M непродолжаемо.

Предположим противное и обозначим через N нетривиальное продолжение многообразия M . Пусть $S \subset N$ обозначает множество неподвижных точек всевозможных локальных изометрий из псевдогруппы $Z(N)$. Точно так же, как и при доказательстве леммы 3, было профакторизовано многообразие $M \setminus S$, профакторизуем многообразие $N \setminus S$. В результате получим многообразие L , удовлетворяющее свойству однозначного продолжения векторных полей Киллинга и не допускающее локальных изометрий, сохраняющих ориентацию и все векторные поля Киллинга. Обозначим через i вложение $i: M \rightarrow N$. Докажем, что $i(M) \cap S = \emptyset$. Если $x \in i(M)$, то и некоторый нормальный шар B с центром в x принадлежит $i(M)$. Если, кроме того, $x \in S$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$, удовлетворяющая условию $\varphi(x) = x$. Эта изометрия определяет изометрию шара B в себя, заданную в нормальных координатах линейным отображением – дифференциалом изометрии φ . Но существование такой изометрии противоречит тривиальности псевдогруппы $Z(M)$. Таким образом, i дает вложение $i: M \rightarrow N \setminus S$. Сквозное отображение $\pi \cdot i: M \rightarrow L$, где $\pi: N \setminus S \rightarrow L$, построенное при доказательстве леммы 3 накрывающее отображение, является также вложением. Если $\pi \cdot i(x) = \pi \cdot i(y)$, то существует локальная изометрия $\varphi \in Z(M)$ такая, что $\varphi(x) = \varphi(y)$. Следовательно, $x = y$. В силу того, что M – максимальный элемент множества Λ , $\pi \cdot i$ является изометрией, и $N \setminus S$ накрывает M .

Имеем накрывающее отображение $\pi: N \setminus S \rightarrow M$ и вложение $i: M \rightarrow N \setminus S$, причем $i(M)$ открыто в $N \setminus S$. Пусть имеется последовательность точек $x_n \in i(M)$, сходящаяся к $x \in N \setminus S$. Тогда последовательность $y_n = \pi(x_n)$ также сходится к некоторой точке $y \in M$. Но так как $x_n = i(y_n)$, то $x = i(y) \in i(M)$. Это доказывает замкнутость $i(M)$ в $N \setminus S$. Итак, $N \setminus S$ несвязно или $N \setminus S = M$. Но несвязность $N \setminus S$ противоречит лемме 2. Поэтому $N \setminus S = M$. Докажем, что $S = \emptyset$. Предположим противное и рассмотрим нормальный шар B с центром в некоторой точке $x \in S \subset N$. Существует нетривиальная изометрия шара B в себя. Эта изометрия не оставляет неподвижными точки из $B \setminus S$ и поэтому является нетождественной локальной изометрией из псевдогруппы $Z(N \setminus S)$. Но так как $N \setminus S = M$, то это противоречит тривиальности псевдогруппы $Z(M)$. Это доказывает, что $S = \emptyset$, $N = M$ и M непродолжаемо.

Теорема 4. Пусть φ – локальная изометрия из квазиполного многообразия M в квазиполное многообразие N . Тогда φ продолжается до изометрии $\varphi: M \approx N$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in M$ и гладкую кривую $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(0) \in D(\varphi) \subset M$, $\gamma(1) = x$. Докажем, что изометрию φ , заданную в окрестности $U = D(\varphi) \subset M$ точки $x_0 = \gamma(0)$, можно продолжить вдоль кривой γ . Предположим, что такого продолжения не существует. Рассмотрим минимальное число $t_1 \in [0; 1]$ среди чисел t таких, что изометрия φ не продолжается в окрестность точки $\gamma(t)$ вдоль кривой γ . Докажем тем не менее, что вопреки предположению, продолжение φ на некоторую окрестность точки $\gamma(t_1)$ вдоль кривой γ существует.

В силу предположения, сделанного относительно t_1 , $\forall t \in [0; t_1)$, изометрия φ определена в некоторой окрестности точки $\gamma(t)$. Так что на N определена кривая $\delta(t) = \varphi(\gamma(t))$, $0 \leq t \leq t_1$. Пусть $x_1 = \gamma(t_1)$ и $\varepsilon > 0$ таково, что окрестность $U_\varepsilon = \{x \in M, \rho(x; x_1) < \varepsilon\}$ является нормальной окрестностью каждой из своих точек. Так как $\forall y \in N$ и $\forall \varepsilon_0 > 0 \exists \alpha$ такое, что $\forall t', t'' \in [0; t_1)$ при условии $|t_1 - t'| < \alpha, |t_1 - t''| < \alpha$ выполняются неравенства

$|\rho(y; \delta(t')) - \rho(y; \delta(t''))| \leq \rho(\delta(t'); \delta(t'')) \leq \int_{t'}^{t''} \sqrt{\langle \delta'(t); \delta'(t) \rangle} dt = \int_{t'}^{t''} \sqrt{\langle \gamma'(t); \gamma'(t) \rangle} dt < \varepsilon_0$,
 то $\forall y \in N$ существует $\lim_{t \rightarrow t_1} \rho(y; \delta(t)) = \rho_1(y)$. Рассмотрим множество $V_\varepsilon = \{y \in N \mid \rho_1(y) < \varepsilon\}$.

Существует изометрия $\psi = \varphi^{-1}$ некоторой окрестности $V_D \subset V_\varepsilon$ множества $D = \{y \in N \mid y = \delta(t), t_2 \leq t < t_1\}$ на окрестность $U_D \subset U_\varepsilon$ множества $B = \{x \in M \mid x = \gamma(t), t_2 \leq t < t_1\}$. Докажем, что ψ можно продолжить до изометрии $\psi: V_\varepsilon \approx U_\varepsilon$. Докажем сначала, что ψ можно продолжить вдоль любой кривой $v(s), 0 \leq s \leq 1$, на $V_\varepsilon, v(0) \in V_D, v(1) = y$ – произвольная точка на V_ε . Если предположить, что это не так, то существует минимальное число s_1 среди чисел $u \in [0; 1]$, обладающих свойством: ψ не продолжается вдоль кривой $v(s)$ в какую-нибудь окрестность точки $v(u)$. Пусть $\sigma > 0$ и $s_2 < s_1$ таковы, что множество $B_\sigma = \{y \in N \mid \rho(y; v(s_2)) < \sigma\}$ является нормальной окрестностью точки $v(s_2)$ и $\rho(v(s_2); v(s_1)) < \frac{\sigma}{2}$. Следовательно, $v(s_1) \in B_\sigma$. Используя линейность отображения ψ в нормальных координатах, можно продолжить изометрию ψ , определенную на некоторой окрестности точки $v(s_2)$, до изометрии ψ , определенной на всем множестве B_σ , являющимся окрестностью точки $v(s_1)$. Это опровергает предположение о непродолжаемости ψ вдоль кривой $v(s)$.

Докажем теперь, что продолжение изометрии ψ вдоль всевозможных кривых на V_ε дает однозначное отображение $\psi: V_\varepsilon \rightarrow U_\varepsilon$. Предположим противное. Тогда существует замкнутая жорданова кривая $v(t), 0 \leq t \leq 1, v(0) = v(1)$, на V_ε такая, что кривая $\beta(t) = \psi(v(t))$ на U_ε будет незамкнутой, $\beta(0) \neq \beta(1)$. Но так как всевозможные аналитические продолжения изометрии ψ индуцируют одинаковые отображения на алгебре векторных полей Киллинга, то изометрия вида $\psi \cdot \psi^{-1}$, переводящая $\beta(0)$ в $\beta(1)$, принадлежит псевдогруппе $Z(M)$, а это противоречит тому, что M является квазиполным многообразием. Аналогично доказывается, что продолжение локальной изометрии $\varphi = \psi^{-1}$ из U_ε в V_ε задает однозначное отображение на множестве $\varphi(V_\varepsilon) \subset U_\varepsilon$. Итак, имеем изометрическое вложение $\psi: V_\varepsilon \rightarrow U_\varepsilon$. Докажем, что оно является сюръективным отображением. Если предположить противное, то, склеив многообразия N и U_ε с помощью отображения ψ , получим нетривиальное продолжение многообразия N , что противоречит его непродолжаемости. Следовательно, имеем изометрию $\psi: V_\varepsilon \rightarrow U_\varepsilon$. Обратная изометрия $\psi^{-1}: U_\varepsilon \rightarrow V_\varepsilon$ дает продолжение изометрии φ на окрестность U_ε точки $\gamma(t_1)$ вдоль кривой γ вопреки первоначальному предположению относительно t_1 .

Таким образом, мы доказали, что локальная изометрия φ из M в N продолжается в любую точку $x \in M$ вдоль произвольной кривой на M . Точно так же, как выше мы доказали, что продолжение изометрии ψ вдоль всевозможных кривых на V_ε дает взаимно однозначное отображение, определенное на всем V_ε , доказывается, что продолжение φ вдоль всевозможных кривых на M дает изометрическое вложение $\varphi: M \rightarrow N$.

Следствие 1. Произвольное риманово аналитическое многообразие, алгебра Ли всех векторных полей Киллинга которого не имеет центра, локально изометрично единственному квазиполному многообразию. То есть локально заданная риманова аналитическая метрика, алгебра Ли векторных полей Киллинга которой не имеет центра, единственным образом продолжается до квазиполного многообразия.

Доказательство. Пусть квазиполное многообразие M локально изометрично многообразию M' и N – другое квазиполное многообразие, локально изометричное многообразию M' . Тогда существуют локальная изометрия φ из N в M' и локальная изометрия ψ из M' в M . Суперпозиция изометрий φ и ψ является локально изометрией из N в M . По теореме 4 локальная изометрия $\psi \cdot \varphi$ продолжается до изометрии $M \approx N$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. Пусть \mathfrak{g} – алгебра Ли всех векторных полей Киллинга в римановом аналитическом многообразии M' , диффеоморфном шару, а \mathfrak{h} – ее стационарная подалгебра. Пусть G – односвязная группа, порождённая алгеброй \mathfrak{g} , H – её подгруппа, порождённая подалгеброй \mathfrak{h} . Если \mathfrak{g} не имеет центра, то H замкнута в G .

Доказательство. Так как M' диффеоморфно шару, его векторные поля Киллинга аналитически продолжаются на нем однозначно. По теореме 3 многообразие M' локально изоморфно квазиполному многообразию M , имеющему ту же самую алгебру Ли \mathfrak{g} всех векторных полей Киллинга и ту же самую стационарную подалгебру \mathfrak{h} . Для произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{g}$ при всех значениях параметра t меньше некоторого числа δ , элементы однопараметрической

группы преобразований $ExptX$ являются локальными изометриями многообразия M . По теореме 4 они продолжаются до изометрий всего многообразия M . Но тогда определены изометрии $ExpntX = (ExptX)^n$. Таким образом, группа G действует на M , а H является ее стационарной подгруппой. Это означает, что орбита группы G на M покрывается однородным многообразием G/H . Следовательно, H замкнута в G .

Отметим, что квазиполное многообразие является наиболее сжатым, т.е. универсально притягивающим объектом в категории всех локально изометричных многообразий. Для любого риманова аналитического многообразия M' , алгебра векторных полей Киллинга которого не имеет центра, существует локально изометрическое отображение из $M' \setminus S'$ в квазиполное многообразие M , определенное на всем $M' \setminus S'$, где S' – множество неподвижных точек всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий многообразия M' .

Заключение. Псевдополные римановы аналитические многообразия

Квазиполное многообразие единственно в классе всех аналитических продолжений данного ростка и обладает рядом замечательных свойств. Прежде всего, свойством максимальной симметрии, т. е. любая локальная изометрия $f: U \rightarrow V$ из квазиполного многообразия M в себя аналитически продолжается до изометрии $f: M \rightarrow M$. Однако понятие квазиполного многообразия обладает не только тем недостатком, что оно определено не для всех локально заданных римановых аналитических метрик, но оно также не является в определенном смысле «самым полным». А именно существует росток риманова аналитического многообразия, допускающий продолжение до полного многообразия, каноническое продолжение которого до квазиполного не является полным многообразием.

Пример 1. Рассмотрим эллипсоид в трёхмерном пространстве, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Для того чтобы получить квазиполное многообразие в классе всех римановых аналитических многообразий, локально изометричных эллипсоиду, необходимо выбросить из эллипсоида 6 точек пересечения с осями координат и профакторизовать полученное многообразие по группе вращений на 180° вокруг всех осей координат.

Дать обобщение понятия полноты, приводящее к «самому полному» многообразию для произвольного ростка риманова аналитического многообразия, оказывается возможным.

Определение 6. Риманово аналитическое односвязное многообразие M называется псевдополным, если оно обладает следующими свойствами:

1. M непродолжаемо.
2. Не существует локально изометрического накрывающего отображения $f: M \rightarrow N$, где N – односвязное риманово аналитическое многообразие; $f(M)$ – открытое подмножество в N , не равное N .

Если росток риманова аналитического многообразия допускает аналитическое продолжение до полного многообразия, то псевдополное многообразие будет единственным для данного ростка и полным односвязным многообразием. Однако в общем случае продолжение до псевдополного многообразия далеко не единственно. Выделим среди псевдополных многообразий наиболее симметричные.

Определение 7. Риманово аналитическое односвязное многообразие M называется правильным псевдополным многообразием, если не существует накрывающего локально изометрического отображения $f: M \setminus S \rightarrow N$ в другое псевдополное многообразие N , локально изометричное многообразию M .

Правильные псевдополные многообразия определены и существуют в любом классе локально изометричных римановых аналитических многообразий, алгебра Ли всех векторных полей которых не имеет центра (S – множество неподвижных точек всех сохраняющих ориентацию и векторные поля Киллинга локальных изометрий многообразия M в себя). Такое многообразие не единственно в данном классе, но любая локальная изометрия из правильного псевдополного многообразия в себя аналитически продолжается до изометрии $f: M \rightarrow M$.

Список источников

1. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964. 534 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии : в 2 т. М.: Наука, 1981. Т. 1. 414 с.
3. Smith G.H. Analytic extension of Riemannian manifolds // Bull. Austral. Math. Soc. 1978. Vol. 18. P. 147–148.
4. Попов В.А. Аналитическое продолжение локально заданных римановых многообразий // Мат. заметки. 1984. Т. 36, вып. 4. С. 559–570.
5. Popov V.A. On the Extendability of Locally Defined isometries of a Pseudo-Riemannian Manifolds // J. of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 217, № 5. P. 624–627.
6. Popov V.A. On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Groups // Lobachevskii J. of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 4. P. 724–729.

References

1. Helgason S. *Differential geometry and symmetric spaces*. Moscow: Mir Publ.; 1964. 534 p. (In Russ.).
2. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*: in 2 vol. Moscow: Nauka Publ.; 1981. Vol. 1. 414 p. (In Russ.).
3. Smith G.H. Analytic extension of Riemannian manifolds. *Bull. Austral. Math. Soc.* 1978;18:147-148.
4. Popov V.A. Analytic Extension of Locally Given Riemannian Manifolds. *Mat. zametki = Mathematical Notes*. 1984;38(4):559-570. (In Russ.).
5. Popov V.A. On the Extendibility of Locally Defined isometries of a Pseudo-Riemannian Manifolds. *J. of Mathematical Sciences*. 2016;217(5):624-627.
6. Popov V.A. On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Groups. *Lobachevskii J. of Mathematics*. 2017;38(4):724-729.

Информация об авторе

В.А. Попов – кандидат физико-математических наук, доцент департамента математики.

Information about the author

V.A. Popov - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor of Department of Mathematics.

Статья поступила в редакцию 22.07.2022; одобрена после рецензирования 10.08.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 22.07.2022; approved after reviewing 10.08.2022; accepted for publication 15.11.2022.

Научная статья

УДК 624.074.4

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-65-74

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБОЛОЧКИ

Анатолий Семенович Юдин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

ayudin@srfedu.ru

Аннотация. Используются уравнения типа Тимошенко, учитывающие поперечный сдвиг. Оболочка обладает свойствами конструктивной анизотропии. Рассматриваются вынужденные колебания в диапазоне частот, включающем первые существенные низкочастотные резонансы. Внутреннее рассеяние колебательной энергии учитывается по методу комплексных амплитуд. Исследуется влияние ряда параметров на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) входных податливостей. Используется полуаналитический способ построения решения. В случае свободно опертой на торцах цилиндрической оболочки применяются ряды Фурье по двум координатам. Задача на вынужденные колебания решается разложением амплитуд перемещений по собственным формам колебаний. При этом обеспечивается разделение уравнений для определения коэффициентов по номерам гармоник. Алгоритм на этой базе позволяет быстро строить необходимые для анализа АЧХ. Такая модель позволяет построить решение практически в аналитическом виде и ввести параметр частоты в коэффициенты решения в качестве независимого аргумента. Это дает возможность строить АЧХ как функции частоты за секунды и быстро оценивать влияние ряда параметров: жёсткостей, коэффициентов потерь, коэффициента Пуассона, контакта с акустической средой. Кроме того, цилиндрические оболочки широко используются в составных конструкциях. Поэтому при возбуждении колебаний на таких участках результаты применимы и для составных конструкций для частот, на которых происходит локализация колебаний в пределах секции.

Реализованный метод выдаёт результаты практически мгновенно. Представленный подход эффективен при многовариантном анализе влияния параметров конструкции на её виброактивность при вынужденных колебаниях. Метод также полезен при тестировании сложных расчётных комплексов программ.

Ключевые слова: оболочки, колебания, модель с учётом поперечного сдвига, амплитудно-частотные характеристики, влияние механических параметров

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Южного федерального университета, внутренний грант № ВнГр/2020-04-ИМ, Министерство науки и высшего образования Российской Федерации.

Для цитирования: Юдин А.С. Эффективный метод построения амплитудно-частотных характеристик оболочки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 65–74.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

EFFECTIVE METHOD FOR CONSTRUCTING AMPLITUDE-FREQUENCY SHELL CHARACTERISTICS

Anatoly S. Yudin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
ayudin@sfedu.ru

Abstract. Timoshenko type equations are used, taking into account the transverse shift. The shell has the properties of constructive anisotropy. Forced oscillations in the frequency range, including the first significant low-frequency resonances, are considered. The internal scattering of vibrational energy is taken into account by the method of complex amplitudes. The influence of a number of parameters on the amplitude-frequency characteristics (frequency response) of input compliance is investigated. A semi-analytical method of constructing a solution is used. In the case of a cylindrical shell freely supported at the ends, Fourier series are used in two coordinates. The problem of forced oscillations is solved by decomposing the amplitudes of displacements according to their own forms of oscillations. At the same time, the separation of equations for determining coefficients by harmonic numbers is provided. The algorithm on this basis allows you to quickly build the amplitude-frequency characteristics necessary for analysis.

Keywords: shells, vibrations, model taking into account transverse shear, amplitude-frequency characteristics, influence of mechanical parameters

Acknowledgments: the work was supported by the Southern Federal University, internal grant No. VnGr/2020-04-IM, Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Yudin A.S. Effective Method for Constructing Amplitude-Frequency Shell Characteristics. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):65-74. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Для анализа свойств конструкции в условиях вынужденных колебаний с учетом внутреннего трения необходима информация об амплитудах колебаний на разных частотах. Это важно для разнесения частот вынуждающих сил и резонансов конструкции, для принятия мер виброгашения.

Обычно для решения стационарных динамических задач применяются методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений [1–10]. При таком подходе для построения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) оболочки необходимы длительные расчёты на дискретном множестве частот. От этого трудно уйти в случаях сложных по геометрии конструкций. Однако, когда важен анализ влияния механических свойств, это можно делать на простой по геометрии круговой цилиндрической оболочке со свободным опиранием торцов. Такая модель позволяет построить решение практически в аналитическом виде и ввести параметр частоты в коэффициенты решения в качестве независимого аргумента. Это дает возможность строить АЧХ как функции частоты за секунды и быстро оценивать влияние ряда параметров: жёсткостей, коэффициентов потерь, коэффициента Пуассона, контакта с акустической средой. Кроме того, цилиндрические оболочки широко используются в составных конструкциях. Поэтому при возбуждении колебаний на таких участках результаты применимы и для составных конструкций для частот, на которых происходит локализация колебаний в пределах секции.

Уравнения

Рассмотрим оболочку вращения в системе криволинейных ортогональных координат, линии которых совпадают с линиями главных кривизн. В соответствии с гипотезой прямой неортогональной материальной нормали перемещения точек оболочки определяются следующим образом:

$$U(\alpha_1, \alpha_2, z) = u(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$V(\alpha_1, \alpha_2, z) = v(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$W(\alpha_1, \alpha_2, z) = w(\alpha_1, \alpha_2),$$

где u, v, w – компоненты перемещений точек срединной поверхности оболочки; φ_1, φ_2 – углы поворота нормали к срединной поверхности. Число степеней свободы равно пяти.

В этом случае линейные деформационные соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{11}(\alpha_1, \alpha_2, z) = E_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \varepsilon_{13}(\alpha_1, \alpha_2, z) = E_{13}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\varepsilon_{12}(\alpha_1, \alpha_2, z) = E_{12}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \varepsilon_{33}(\alpha_1, \alpha_2, z) = 0.$$

Здесь $E_{ij}, E_{12}, E_{j3}, K_{ij}, K_{12}, (j=1, 2)$ – деформации растяжения-сжатия, тангенциального и поперечного сдвига, изменения кривизн, кручение срединной поверхности оболочки. Они связаны с компонентами перемещений и углами поворота нормали формулами:

$$E_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} v + k_1 w, \quad E_{13} = \varphi_1 - \mathcal{G}_1, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (1)$$

$$E_{12} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v, \quad K_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varphi_2, \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$K_{12} = \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varphi_1 \right) + \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varphi_2 \right), \quad \mathcal{G}_1 = k_1 u - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad \mathcal{G}_2 = k_2 v - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2},$$

где A_1, A_2 – коэффициенты Лямэ; k_1, k_2 – главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Для оболочек вращения кинематические соотношения (1) можно записать в виде

$$E_{11} = u' + k_1 w, \quad E_{22} = v' + \psi u + k_2 w, \quad E_{12} = v' + u^\bullet - \psi v, \quad K_{11} = \varphi_1', \quad K_{22} = \varphi_2' + \psi \varphi_1,$$

$$K_{12} = \varphi_2' + \varphi_1^\bullet - \psi \varphi_2, \quad E_{13} = \varphi_1 - \mathcal{G}_1, \quad E_{23} = \varphi_2 - \mathcal{G}_2, \quad \mathcal{G}_1 = k_1 u - w', \quad \mathcal{G}_2 = k_2 v - w^\bullet,$$

$$(\cdot)' = \frac{1}{A_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_1}, \quad (\cdot)^\bullet = \frac{1}{A_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha_2}, \quad \psi = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}.$$

Для цилиндрической оболочки $k_1 = 0, k_2 = 1/R_c, \psi = 0, A_2 = R_c, E_{11} = u', E_{22} = v' + k_2 w,$

$$E_{12} = v' + u^\bullet, \quad K_{11} = \varphi_1', \quad K_{22} = \varphi_2', \quad K_{12} = \varphi_2' + \varphi_1^\bullet, \quad E_{13} = \varphi_1 - \mathcal{G}_1, \quad E_{23} = \varphi_2 - \mathcal{G}_2,$$

$$\mathcal{G}_1 = -w', \quad \mathcal{G}_2 = k_2 v - w^\bullet, \quad \mathcal{G}_1 = -w', \quad \mathcal{G}_2 = k_2 v - w^\bullet.$$

Уравнения движения оболочки следуют из принципа Гамильтона $\int_0^t (\delta K - \delta U + \delta A) dt = 0$, в

котором подынтегральное выражение образовано алгебраической суммой вариаций кинетической энергии δK , потенциальной энергии δU и элементарной работы внешних сил δA .

В дальнейшем рассматриваются установившиеся вынужденные колебания оболочки с зависимостью величин от времени t вида $F(\alpha_1, \alpha_2, t) = F_a(\alpha_1, \alpha_2) \cdot e^{-i\omega t}$, где F_a – комплексная амплитуда входящих в уравнение гармонических величин; ω – круговая частота вынуждающей нагрузки.

Запишем уравнения колебаний оболочки относительно комплексных амплитуд, для которых сохраним обозначения начальных значений. В варианте вращения оболочек с учетом реакции внешней среды они имеют вид

$$T_{11}' + \psi(T_{11} - T_{22}) + S^\bullet + k_1 Q_{11} + \omega^2 (bu + c\varphi_1) + q_1 = 0, \quad S' + 2\psi S + T_{22}^\bullet + k_2 Q_{22} + \omega^2 (bv + c\varphi_2) + q_2 = 0, \\ Q_{11}' + \psi Q_{11} + Q_{22}^\bullet - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + \omega^2 bw + q_3 - K_L p = 0, \quad (2)$$

$$M_{11}' + \psi(M_{11} - M_{22}) + H^\bullet - Q_{11} + \omega^2 (cu + d\varphi_1) = 0, \quad H' + 2\psi H + M_{22}^\bullet - Q_{22} + \omega^2 (cv + d\varphi_2) = 0.$$

Здесь b, c, d – инерционные коэффициенты; q_1, q_2, q_3 – амплитуды поверхностных нагрузок.

Слагаемое K_{LP} обозначает реакцию внешней жидкости, влияние которой будем учитывать методом моделирования локального импеданса [1, 7, 11].

Уравнения (2) для цилиндрической оболочки упрощаются:

$$\begin{aligned} T'_{11} + S^* + \omega^2(bu + c\varphi_1) + q_1 = 0, \quad S' + T^*_{22} + k_2 Q_{22} + \omega^2(bv + c\varphi_2) + q_2 = 0, \\ Q'_{11} + Q^*_{22} - k_2 T_{22} + \omega^2 bw + q_3 - K_{LP} = 0, \quad M'_{11} + H^* - Q_{11} + \omega^2(cu + d\varphi_1) = 0, \\ H' + M^*_{22} - Q_{22} + \omega^2(cv + d\varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Соотношения упругости возьмём в варианте конструктивной ортотропии:

$$\begin{aligned} T_{11} = B_{11}E_{11} + B_{12}E_{22} + A_{11}K_{11} + A_{12}K_{22}, \quad T_{22} = B_{12}E_{11} + B_{22}E_{22} + A_{12}K_{11} + A_{22}K_{22}, \\ M_{11} = A_{11}E_{11} + A_{12}E_{22} + D_{11}K_{11} + D_{12}K_{22}, \quad M_{22} = A_{12}E_{11} + A_{22}E_{22} + D_{12}K_{11} + D_{22}K_{22}, \\ S = B_{33}E_{12} + A_{33} \cdot 2K_{12}, \quad H = A_{33}E_{12} + D_{33} \cdot 2K_{12}, \quad Q_{11} = G_{13}E_{13}, \quad Q_{22} = G_{23}E_{23}. \end{aligned}$$

Коэффициенты жёсткостей для слоистых подкреплённых оболочек вычисляются по формулам, приведённым в [1].

Метод решения

Для осесимметричных конструкций в представленных выше уравнениях можно отделить окружную координату α_2 . Рассмотрим действующую по нормали к оболочке нагрузку q_3 , симметрично расположенную относительно начала отсчета окружной координаты. Тогда разложения в ряды Фурье можно выполнять либо по косинусам, либо по синусам. Например,

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\alpha_2, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \sin n\alpha_2, \quad T_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{11n} \cos n\alpha_2, \quad q_3 = \sum_{n=0}^{\infty} q_{3n} \cos n\alpha_2 \quad \text{и т.д.}$$

По косинусам разлагаются компоненты напряженно-деформированного состояния $u, w, \varphi_1, \mathcal{I}_1, E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{13}, E_{23}, K_{11}, K_{22}, K_{12}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}$, по синусам – $v, \varphi_2, \mathcal{I}_2, E_{12}, K_{12}, S, H, Q_{22}$.

В дальнейшем уравнения и другие соотношения приводятся к безразмерному виду по формулам из [1].

К уравнениям для цилиндрической оболочки применим метод комплексных амплитуд и отделим n -ю окружную моду. После перехода к безразмерным величинам кинематические соотношения приводятся к виду $E_{11n} = u'_n, \quad E_{22n} = nv_n + w_n, \quad E_{12n} = v'_n - nu_n, \quad K_{11n} = \varepsilon_* \varphi'_{1n}, \quad K_{22n} = \varepsilon_* n \varphi_{2n}, \quad K_{12n} = \varepsilon_* (\varphi'_{2n} - n\varphi_{1n}), \quad E_{13n} = \varphi_{1n} - \mathcal{I}_{1n}, \quad E_{23n} = \varphi_{2n} - \mathcal{I}_{2n}, \quad \mathcal{I}_{1n} = -w'_n, \quad \mathcal{I}_{2n} = v_n + nw$.

Наиболее просто аналитическое решение строится для свободного опирания: $v=0, M_{11}=0, T_{11}=0, w=0, Q_{11}=0, \varphi_2=0$. Этим условиям и однородным ($q_{3n}=0$) уравнениям колебаний удовлетворяют следующие формы собственных колебаний: $u_n(x) = u_{nk} \cos(mx), \quad v_n(x) = v_{nk} \sin(mx), \quad w_n(x) = w_{nk} \sin(mx), \quad \varphi_{1n}(x) = \varphi_{1nk} \cos(mx), \quad \varphi_{2n}(x) = \varphi_{2nk} \sin(mx)$, где $m = k\pi/L, k$ – число продольных полуволен; $x = \alpha_1$ – продольная координата. Окружную координату будем также обозначать $\theta = \alpha_2$.

Задачи на вынужденные колебания можно решать разложением амплитуд перемещений по собственным формам колебаний, т.е. в рядах Фурье и по продольной координате. При этом обеспечивается разделение уравнений для определения коэффициентов по номерам мод.

По окружной координате θ выполняются косинусные и синусные разложения в ряды на интервале $(0, 2\pi)$ ввиду симметрии нагрузки в диаметральной плоскости (ДП). В продольном направлении решения на интервале $(0, L)$ также представляются рядами по синусам и косинусам. Ограничения на координаты нагрузки по длине оболочки не накладываются. Здесь выполняется разложение четных и нечетных функций на интервале $(-L, L)$, которое формально рассматривается как продолжение решения на интервал $(-L, 0)$ четным или нечетным образом. Нас интересует только часть на интервале $(0, L)$ оболочки. Поэтому n – это число волн в окружном направлении; k – число полуволен на образующей оболочки.

Решение в рядах для перемещений и углов поворота как функций координат и частоты имеет вид

$$\begin{aligned}
 u(x, \theta, \Omega) &= \sum_{k=1}^M u_{0k}(\Omega) \cos[(k\pi/L)x] + \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N u_{nk}(\Omega) \cos[(k\pi/L)x] \cos(n\theta), \\
 v(x, \theta, \Omega) &= \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N v_{nk}(\Omega) \sin[(k\pi/L)x] \sin(n\theta), \\
 w(x, \theta, \Omega) &= \sum_{k=1}^M w_{0k}(\Omega) \sin[(k\pi/L)x] + \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N w_{nk}(\Omega) \sin[(k\pi/L)x] \cos(n\theta), \\
 \varphi_1(x, \theta, \Omega) &= \sum_{k=1}^M \varphi_{10k}(\Omega) \cos[(k\pi/L)x] + \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N \varphi_{1nk}(\Omega) \cos[(k\pi/L)x] \cos(n\theta), \\
 \varphi_2(x, \theta, \Omega) &= \sum_{k=1}^M \sum_{n=1}^N \varphi_{2nk}(\Omega) \sin[(k\pi/L)x] \sin(n\theta).
 \end{aligned}$$

Используя разложения такого типа во всех соотношениях и уравнениях, получим для коэффициентов тригонометрических рядов формулы:

$$\begin{aligned}
 E_{11nk} &= -mu_{nk}, E_{22nk} = nv_{nk} + w_{nk}, E_{12nk} = mv_{nk} - nu_{nk}, K_{11nk} = -\varepsilon_* m \varphi_{1nk}, \\
 K_{12nk} &= \varepsilon_* n \varphi_{2nk}, K_{12n} = \varepsilon_* (m \varphi_{2nk} - n \varphi_{1nk}), E_{13nk} = \varphi_{1nk} + \vartheta_{1nk}, E_{23nk} = \varphi_{2nk} + \vartheta_{2nk}, \\
 \vartheta_{1nk} &= -mw_{nk}, \vartheta_{2nk} = v_{nk} + nw_{nk}, \vartheta_{2n} = v_n + nw_n,
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 T_{11nk} &= B_{11}E_{11nk} + B_{12}E_{22nk} + A_{11}K_{11nk} + A_{12}K_{22nk}, \\
 T_{22nk} &= B_{12}E_{11nk} + B_{22}E_{22nk} + A_{12}K_{11nk} + A_{22}K_{22nk}, \\
 M_{11nk} &= A_{11}E_{11nk} + A_{12}E_{22nk} + D_{11}K_{11nk} + D_{12}K_{22nk}, \\
 M_{22nk} &= A_{12}E_{11nk} + A_{22}E_{22nk} + D_{12}K_{11nk} + D_{22}K_{22nk}, \\
 S_{nk} &= B_{33}E_{12nk} + 2A_{33}K_{12nk}, H_{nk} = A_{33}E_{12nk} + 2D_{33}K_{12nk}, \\
 Q_{11nk} &= G_{13}E_{13nk}, Q_{22nk} = G_{23}E_{23nk},
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 mT_{11nk} + nS_{nk} + \Omega^2(bu_{nk} + \varepsilon_* c \varphi_{1nk}) &= 0, \\
 -mS_{nk} - nT_{22nk} + Q_{22nk} + \Omega^2(bv_{nk} + \varepsilon_* c \varphi_{2nk}) &= 0, \\
 -mQ_{11nk} + nQ_{22nk} - T_{22nk} + \Omega^2(bw_{nk} + q_{3nk} - K_L p_{nk}) &= 0, \\
 mM_{11nk} + nH_{nk} - Q_{11nk}/\varepsilon_* + \Omega^2(cu_{nk} + \varepsilon_* d \varphi_{1nk}) &= 0, \\
 -mH_{nk} - nM_{22nk} - Q_{22nk}/\varepsilon_* + \Omega^2(cv_{nk} + \varepsilon_* d \varphi_{2nk}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Будем рассматривать нагрузку, действующую по нормали к оболочке и эквивалентную сосредоточенной силе Q_3 . Пусть l – длина площадки по продольной координате; δ_1 – длина отрезка ее средней линии; 2δ – угол охвата по окружной координате; x_1, θ_1 – продольная и угловая координаты центра площадки, $S = l\delta_1$ – площадь зоны приложения нагрузки.

Перейдем к безразмерным величинам по формулам:

$$\{l, \delta_1\}_L = \{l, \delta_1\}_D/R_*, \{Q_3\}_L = \{Q_3\}_D(1 - \nu_*^2)/E_* h_*^2, \{q_3\}_L = \{q_3\}_D(1 - \nu_*^2)R_*^2/E_* h_*^2.$$

Далее (в безразмерной форме) сосредоточенная сила «размазывается» по площадке в распределенную по поверхности нормальную нагрузку интенсивности $q_3 = Q_3/(l\delta_1)$ в пределах площадки. В области определения криволинейных координат $\{x \in (0, L); \theta \in (0, 2\pi)\}$, соответствующей рассматриваемой оболочке, распределенную нагрузку можно задать с помощью ступенчатой функции Хэвисайда $H(x)$, которая равна 0 при $x < 0$ и 1 при $x \geq 0$.

Тогда в области определения $q_3(x, \theta) = q_{3a} \Phi_1(x) \Phi_2(\theta)$, где

$$\Phi_1(x) = [H(x - (x_1 - l/2)) - H(x - (x_1 + l/2))], \Phi_2(\theta) = [H(\theta - (\theta_1 - \delta)) - H(\theta - (\theta_1 + \delta))],$$

разложение четной функции $\Phi_2(\theta)$ по косинусам имеет вид

$$\Phi_2(\theta) = \delta/\pi + \sum_{n=1}^N [2/(n\pi)] \sin(n\delta) \cos(n\theta_1) \cos(n\theta).$$

Продолжим $\Phi_1(x)$ на интервал $(-L, 0)$ нечётным образом. Соответствующее разложение в интервале $(-L, L)$ по синусам имеет вид

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^M [4/(k\pi)] \sin[(k\pi/L)l/2] \sin[(k\pi/L)x_1] \sin[(k\pi/L)x].$$

Таким образом, нормальная нагрузка $q_{3a}(x, \theta)$ аппроксимируется двойным рядом:

$$q_{3a}(x, \theta) = (1/2)a_{\theta 0} \sum_{k=1}^M a_{xk} \sin[(k\pi/L)x] + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^M a_{\theta n} a_{xk} \sin[(k\pi/L)x] \cos(n\theta),$$

где $a_{\theta 0} = q_{3a} 2l/L$, $a_{\theta n} = q_{3a} [2/(n\pi)] \sin(n\delta) \cos(n\theta_1)$, $a_{xk} = q_{3a} [4/(k\pi)] \sin[(k\pi/L)l/2] \sin(mx_1)$.

$$\text{Или } q(x, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^M q_{nk} \sin[(k\pi/L)x] \cos(n\theta), \quad q_{k0} = a_{\theta 0} a_{xk} / 2, \quad q_{kn} = a_{\theta n} a_{xk}.$$

Подставляем (3) в (4) и далее в (5). Собирая коэффициенты при u_{nk} , v_{nk} , w_{nk} , φ_{1nk} , φ_{2nk} , получаем алгебраическую систему уравнений пятого порядка для определения коэффициентов рядов решения при $n > 0$: $\mathbf{KX} = \mathbf{B}$. Здесь $\mathbf{K} = [K_{\lambda\mu}]$, $\lambda, \mu = 1, \dots, 5$, – матрица системы; \mathbf{X} – столбец неизвестных с элементами $X_1 = u_{nk}$, $X_2 = v_{nk}$, $X_3 = w_{nk}$, $X_4 = \varphi_{1nk}$, $X_5 = \varphi_{2nk}$; \mathbf{B} – правая часть, зависящая от коэффициентов нагрузки:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{nk} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы \mathbf{K} определяются формулами ($K_L=0$):

$$\begin{aligned} K_{11} &= b\Omega^2 - B_{11}m^2 - B_{33}n^2, \quad K_{12} = mn(B_{12} + B_{33}), \quad K_{13} = B_{12}m, \\ K_{14} &= \varepsilon_*(c\Omega^2 - A_{11}m^2 - 2A_{33}n^2), \quad K_{15} = \varepsilon_*m(A_{12}m + 2A_{33}n), \\ K_{21} &= mn(B_{12} + B_{33}), \quad K_{22} = b\Omega^2 - B_{33}m^2 - B_{22}n^2 - G_{23}, \\ K_{23} &= -n(B_{22} + G_{23}), \quad K_{24} = \varepsilon_*mn(A_{12} + 2A_{33}), \\ K_{25} &= \varepsilon_*(c\Omega^2 - 2A_{33}m^2 - A_{22}n^2) + G_{23}, \\ K_{31} &= B_{12}m, \quad K_{32} = -n(B_{22} + G_{23}), \quad K_{33} = b\Omega^2 - G_{13}m^2 - G_{23}n^2 - B_{22}, \\ K_{34} &= \varepsilon_*(A_{12}m + A_{22}n) - G_{13}m, \quad K_{35} = n(G_{23} - \varepsilon_*A_{22}), \\ K_{41} &= -(A_{11}m^2 + A_{33}n^2), \quad K_{42} = mn(A_{12} + A_{33}), \quad K_{43} = m(A_{12} - G_{13}/\varepsilon_*), \\ K_{44} &= \varepsilon_*(d\Omega^2 - D_{11}m^2 - 2D_{33}n^2) - G_{13}/\varepsilon_*, \quad K_{45} = \varepsilon_*mn(D_{12} + 2D_{33}), \\ K_{51} &= mn(A_{12} + A_{33}), \quad K_{52} = c\Omega^2 - A_{22}n^2 - A_{33}m^2 + G_{23}/\varepsilon_*, \\ K_{53} &= n(G_{23}/\varepsilon_* - A_{22}), \quad K_{54} = \varepsilon_*mn(D_{12} + 2D_{33}), \quad K_{55} = \varepsilon_*(d\Omega^2 - 2D_{33}m^2 - D_{22}n^2) - G_{23}/\varepsilon_*. \end{aligned}$$

Уравнения для определения коэффициентов нулевой окружной моды обрабатываются отдельно. Задача сводится к системе трёх алгебраических уравнений $\mathbf{PY} = \mathbf{C}$ относительно $Y_1 = u_{0k}$, $Y_2 = w_{0k}$, $Y_3 = \varphi_{10k}$, где

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_{0k} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_{11} &= b\Omega^2 - B_{11}m^2, \quad P_{12} = B_{12}m, \quad P_{13} = \varepsilon_*(c\Omega^2 - A_{11}m^2), \quad P_{21} = B_{12}m, \quad P_{22} = b\Omega^2 - G_{13}m^2 - B_{22}, \\ P_{23} &= \varepsilon_*mA_{12} - G_{13}m, \quad P_{31} = c\Omega^2 - A_{11}m^2, \quad P_{32} = m(A_{12} - G_{13}/\varepsilon_*), \quad P_{33} = \varepsilon_*(d\Omega^2 - D_{11}m^2) - G_{23}/\varepsilon_*. \end{aligned}$$

При учете влияния жидкости коэффициенты K_{33} и P_{22} дополняются соответствующими слагаемыми: $K_{33} = b\Omega^2 - K_L Z_{wnk\bar{b}} - G_{13}m^2 - G_{23}n^2 - B_{22}$, $P_{22} = b\Omega^2 - K_L Z_{w0k\bar{b}} - G_{13}m^2 - B_{22}$.

Коэффициент K_L принимает значение 1, когда жидкость подключена, 0 – при отключенной жидкости.

Системы уравнений для определения коэффициентов рядов решаются численно.

Влияние параметров на АЧХ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, подкреплённую одинаковыми рёбрами окружного (шпангоуты) и продольного (стрингеры) направлений. Рёбра имеют одинаковый шаг расстановки (подкрепление вафельного типа) и расположены с внешней стороны оболочки. Материал оболочки и рёбер считаем одинаковым с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν , плотностью ρ . Для учета потерь энергии в оболочке применяется метод комплексных жёсткостей. Поэтому модуль упругости задаётся комплексной величиной $E_c = E(1-i\eta)$, где η – коэффициент потерь; i – мнимая единица.

Длина оболочки L , радиус R , толщина обшивки h . В безразмерном виде характерные величины: $E_* = E$, $h_* = h$, $R_* = R$, $\nu_* = \nu$, $\rho_* = \rho$. Тогда $A_1=1, A_2=1, k_2=1$.

Приняты следующие безразмерные значения: $L_{\bar{b}} = 3,14$, $R_{\bar{b}} = 1,0$, $h_{\bar{b}} = 1,0$, $\rho_{\bar{b}} = 1,0$, $E_{c\bar{b}} = 1 - i\eta$. Исходные значения: коэффициент Пуассона $\nu=0,3$, коэффициент потерь $\eta=0,03$.

Рёбра имеют прямоугольное сечение с шириной основания $\delta_r = h$ и высотой $h_r = 8h$, так что площадь поперечного сечения $F_s = F_r = 8h^2$. Шаг расстановки рёбер $l_s = l_r = 0,2R$.

Приведённые жесткости конструктивной ортотропии определяются следующей группой формул:

$$\begin{aligned} z_{or} &= (h + h_r)/2, \quad z_{os} = (h + h_s)/2, \quad D = E_c h^3 / [12(1 - \nu^2)], \quad I_s = \delta_s h_s^3 / 12, \quad I_r = \delta_r h_r^3 / 12, \\ B_s &= E_c F_s / l_s, \quad B_r = E_c F_r / l_r, \quad I_{os} = I_s + z_{os}^2 F_s, \quad I_{or} = I_r + z_{or}^2 F_r, \quad D_s = E_c I_{os} / l_s, \quad D_r = E_c I_{or} / l_r, \\ I_{1s} &= \delta_s^3 h_s^3 / 12, \quad I_{1r} = \delta_r^3 h_r^3 / 12, \quad J_s = 4I_s I_{1s} / (I_s + I_{1s}), \quad J_r = 4I_r I_{1r} / (I_r + I_{1r}), \quad G_c = E_c / [2(1 + \nu)], \\ G_1 &= G_c h, \quad G_1 = G_c h^3 / 12, \quad G_s = G_c J_s / l_s, \quad G_r = G_c J_r / l_r, \quad B_{11} = B + K_s B_s, \quad B_{22} = B + B_r, \quad B_{12} = \nu B, \\ D_{11} &= D + K_s D_s, \quad D_{22} = D + D_r, \quad D_{12} = \nu D, \quad A_{11} = K_s B_s z_{os}, \quad A_{22} = B_r z_{or}, \quad A_{12} = 0, \quad A_{33} = 0, \quad B_{33} = G_1, \\ D_{33} &= G_1 + K_s G_s + G_r, \quad G_{13} = G_{23} = 0,1 B_{33}. \end{aligned}$$

Здесь введён коэффициент K_s , принимающий значение 0 или 1, для отключения ($K_s=0$) или подключения ($K_s=1$) стрингеров. Коэффициенты жёсткостей, входящих в соотношения упругости, являются комплексными величинами. Приведём безразмерные значения их реальных частей при $K_s=0$: $Re\{B_{11}, B_{22}, B_{12}, B_{33}; D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{33}; A_{11}, A_{22}, A_{12}, A_{33}; G_{13}\} = \{1; 1,364; 0,3; 0,35; 0,083; 9,396; 0,025; 0,075; 0; 9,45; 0; 0; 0,035\}$. Для получения комплексных значений эти числа нужно умножить на $(1-i\eta)$.

Инерционные коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} b &= \rho h + \rho K_s F_s / [l_s(1 - \nu^2)] + \rho F_r / [l_r(1 - \nu^2)], \quad c = [F_r h_r \rho (K_s + 1)(h + h_r)] / (2l_r), \\ d &= (\rho h^3 / 12) + [F_r h_r \rho (K_s + 1)(3h^2 + 6hh_r + 4h_r^2)] / (12l_r). \end{aligned}$$

После нормировки $\tilde{b} = b / (\rho h)$, $\tilde{c} = c / (\rho h^2)$, $\tilde{d} = d / (\rho h^3)$ безразмерные инерционные параметры получают значения: $\tilde{b} = 1,44$, $\tilde{c} = 72$, $\tilde{d} = 409,4$.

Оболочка возбуждается нормальной гармонической нагрузкой q_{3a} , эквивалентной сосредоточенной силе с амплитудой $Q_{3a}=0,0075$ (безразмерное значение). Сила распределяется по квадратной площадке со стороной 0,8, центр которой имеет координаты $x=L/2$, $\theta=0$. Тогда амплитуда распределённой нормальной нагрузки будет $q_{3a}=0,012$.

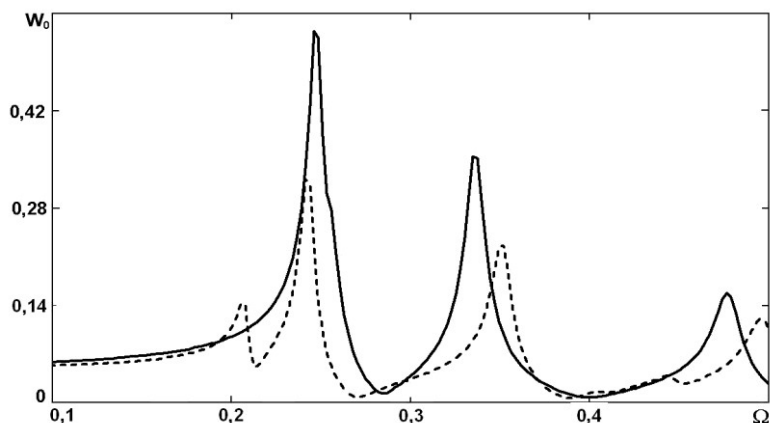


Рис. 1. Оболочки без стрингеров (со шпангоутами) – сплошная кривая; с подкреплениями двух направлений (шпангоуты и стрингеры) – пунктир / Fig. 1. Shells without stringers (with frames) - solid curve; with reinforcements in two directions (frames and stringers) - dotted line

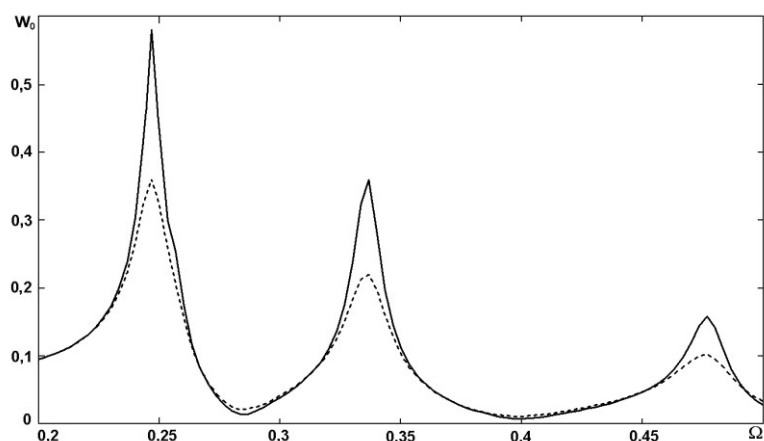


Рис. 2. Оболочки со шпангоутами, влияние коэффициента потерь: $\eta=0,03$ – сплошная кривая; $\eta=0,05$ – пунктир / Fig. 2. Shells with frames, influence of loss factor: $\eta=0.03$ - solid curve; $\eta=0.05$ - dotted line

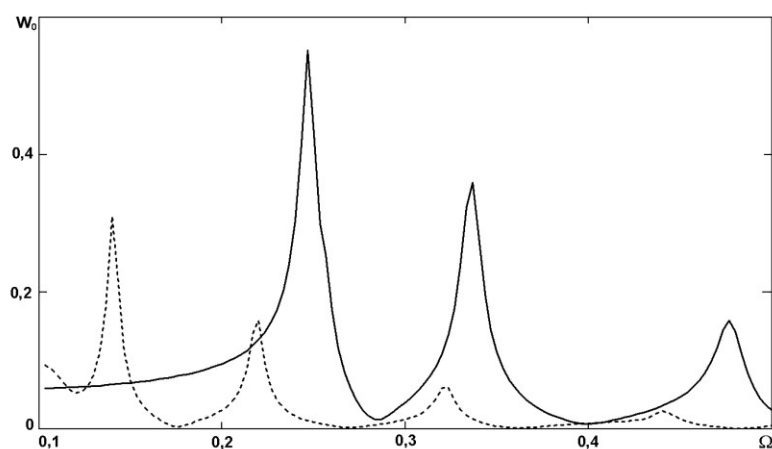


Рис. 3. Оболочки со шпангоутами: сухая оболочка – сплошная кривая; оболочка в жидкости – пунктир / Fig. 3. Shells with frames: dry shell - solid curve; shell in liquid - dotted line

Зафиксируем в компоненте нормального смещения w координаты точки наблюдения, в качестве которой возьмём точку в центре площадки нагружения (в точке под силой): $x=L/2, \theta=0$. Получаемая амплитуда колебаний называется входной податливостью. Модуль этой величины остаётся функцией параметра частоты, график которой даёт АЧХ $w_0(\Omega)$.

Выполним сравнительные расчёты АЧХ для цилиндрических оболочек, подкреплённых сеткой круговых (шпангоуты) и продольных (стрингеры) рёбер. Оболочки свободно оперты на торцах (условия Навье). Сравниваются оболочки, подкреплённые рёбрами двух направлений и только со шпангоутами. Демонстрируется влияние потерь в материале на резонансные амплитуды. Рассмотрены сухая оболочка и оболочка в жидкости. Оценивается влияние коэффициента Пуассона для нормального материала ($\nu > 0$) и ауксетика ($\nu < 0$).

На рис. 1 сравниваются АЧХ шпангоутной оболочки с оболочкой, имеющей шпангоуты и стрингеры. Оболочка с подкреплениями обоих направлений имеет большую массу и жёсткость, что снижает уровни резонансных амплитуд. Коэффициент Пуассона равен 0,3.

Рисунок 2 показывает влияние коэффициента потерь колебательной энергии в материале оболочки на уровни резонансных колебаний. Сплошная кривая соответствует коэффициенту потерь $\eta=0,3$, пунктир – $\eta=0,5$. Увеличение потерь снижает амплитуды колебаний. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

На рис. 3 для оболочки со шпангоутами сравниваются АЧХ сухой оболочки (сплошная кривая) и погруженной в жидкость (пунктир). Коэффициент

Пуассона $\nu = 0,3$. Жидкость снижает резонансные частоты за счет присоединённой массы и демпфирует амплитуды колебаний.

На рис. 4 для шпангоутной оболочки показаны АЧХ для нормального материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$ (сплошная кривая) и материала со свойствами ауксетика с отрицательным коэффициентом Пуассона $\nu = -0,3$ (пунктирная кривая). Наблюдаются эффект повышения резонансных частот и некоторое снижение амплитуд колебаний, что благоприятно для целей вибродемпфирования [5].

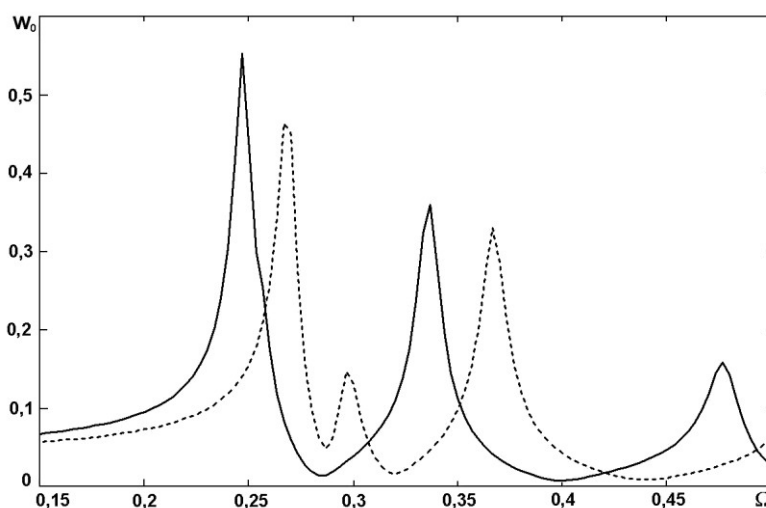


Рис. 4. Шпангоутные оболочки: нормальный материал (коэффициент Пуассона $\nu=0,3$) – сплошная кривая; материал типа ауксетика (отрицательный коэффициент Пуассона $\nu=-0,3$) – пунктир / Fig. 4. Frame shells: normal material (Poisson's ratio $\nu=0.3$) - solid curve; auxetic type material (negative Poisson's ratio $\nu=-0.3$) - dotted line

Заключение

Реализован метод быстрого построения АЧХ конструктивно-анизотропных круговых цилиндрических оболочек на основе уравнений, учитывающих поперечный сдвиг (модель типа Тимошенко). Вычисления на основе метода дифференциальной прогонки с ортогонализацией, выполняемые для сложных конструкций [1], требуют десятки часов работы. Реализованный метод выдаёт результаты практически мгновенно. Представленный подход эффективен при многовариантном анализе влияния параметров конструкции на её виброактивность при вынужденных колебаниях. Метод также полезен при тестировании сложных расчётных комплексов программ.

Список источников

1. Юдин А.С., Сафроненко В.Г. Виброакустика структурно-неоднородных оболочек. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2013. 424 с.
2. Юдин А.С. Статика и колебания оболочек вращения с жидкостью. Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2014. 204 с.
3. Ворович И.И., Юдин А.С., Сафроненко В.Г. Численно-аналитические методы в задачах виброакустики оболочечных конструкций // Конструкции из композиционных материалов. 2000. № 2. С. 7–18.
4. Ворович И.И., Ционский А.Я., Юдин А.С. Метод собственных форм решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки вращения, подкрепленной ребрами, в жидкости // Акуст. журн. 1983. Т. 29, № 6. С. 744–748.
5. Юдин А.С. Эффективные модели для составных оболочек вращения // Изв. вузов. Сев-Кавк. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 184–188.
6. Юдин А.С., Яценко М.Н. Вынужденные колебания подкрепленных оболочек вращения с неосесимметричными жесткостными и массовыми неоднородностями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 2. С. 161–166.
7. Юдин А.С., Яценко М.Н. Виброакустика оболочки с кольцевыми ребрами переменной жесткости // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций : науч. тр. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1995. Вып. 2. С. 97–105.
8. Юдин А.С., Щитов Д.В. Анализ оболочек вращения с разрывными параметрами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Приложение. № 3. С. 22–29.
9. Юдин А.С., Щитов Д.В. О расчете оболочек вращения, нагруженных внутренним давлением // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Приложение. № 3. С. 29–36.

10. Сафроненко В.Г., Шутько В.М., Юдин А.С. Численные методы в теории оболочек // Методы интегрирования жестких систем в задачах Коши. Методы погружения, пристрелки, прогонки, итераций для краевых задач. Ростов н/Д.: УПИ РГУ, 1999. 30 с.

11. Yudin A.S. Mathematical Modeling in Problems of Vibrating Acoustics of Shells // Advanced Materials. Physics, Mechanics and Applications, series: Springer Proceedings in Physics. 2013. Vol. 152, ch. 15. P. 181–191.

References

1. Yudin A.S., Safronenko V.G. *Vibroacoustics of structurally inhomogeneous shells*. Rostov-on-Don: Southern Federal University Press; 2013. 424 p. (In Russ.).

2. Yudin A. S. *Statics and vibrations of shells of rotation with liquid*. Rostov-on-Don: Southern Federal University Press; 2014. 204 p. (In Russ.).

3. Vorovich I.I., Yudin A.S., Safronenko V.G. Numerical and analytical methods in the problems of vibration acoustics of shell structures. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov = Composite Materials Constructions*. 2000;(2):7-18. (In Russ.).

4. Vorovich I.I., Zionsky A.Ya., Yudin A.S. A method of eigenforms for solving the problem of forced oscillations of a shell of rotation supported by ribs in a liquid. *Akust. zhurn. = Acoustic Journal*. 1983;29(6):744-748. (In Russ.).

5. Yudin A.S. Effective models for composite shells of rotation. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2000;(3):184-188. (In Russ.).

6. Yudin A.S., Yatsenko M.N. Forced oscillations of reinforced shells of rotation with non-axisymmetric stiffness and mass inhomogeneities. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela = Mechanics of Solids*. 1991;(2):161-166. (In Russ.).

7. Yudin A.S., Yatsenko M.N. Vibroacoustics of a shell with annular ribs of variable stiffness. *Fundamental and applied problems of mechanics of deformable media and structures: scientific papers*. Nizhniy Novgorod: Nizhniy Novgorod University Press; 1995;(2):97-105. (In Russ.).

8. Yudin A.S., Shields D.V. Analysis of shells of rotation with discontinuous parameters. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2004;(S3):22-29. (In Russ.).

9. Yudin A.S., Shields D.V. On the calculation of shells of rotation loaded with internal pressure. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2004;(S3):29-36. (In Russ.).

10. Safronenko V.G., Shutko V.M., Yudin A.S. Numerical methods in shell theory. *Methods of integration of rigid systems in Cauchy problems. Methods of immersion, targeting, runs, iterations for boundary value problems*. Rostov-on-Don: Rostov State University Press; 1999. 30 p. (In Russ.).

11. Yudin A. S. Mathematical Modeling in Problems of Vibrating Acoustics of Shells. *Advanced Materials. Physics, Mechanics and Applications. Series: Springer Proceedings in Physics*. 2013;152(15):181-191.

Информация об авторе

А.С. Юдин – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the author

A.S. Yudin - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Main Researcher, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 08.08.2022; одобрена после рецензирования 22.08.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 08.08.2022; approved after reviewing 22.08.2022; accepted for publication 15.11.2022.

ПОСВЯЩАЕТСЯ 100-ЛЕТИЮ М.М. ДРАГИЛЕВА

DEDICATED TO THE 100TH ANNIVERSARY OF M.M. DRAGILEV

Персоналии

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-75-77

Personalities

МИХАИЛ МИХАЙЛОВИЧ ДРАГИЛЕВ (1922–2020) – ВЫДАЮЩИЙСЯ МАТЕМАТИК И УЧИТЕЛЬ

MIKHAIL MIKHAILOVICH DRAGILEV (1922-2020) - OUTSTANDING MATHEMATIST AND TEACHER

12 августа 1922 г. в Ленинграде в семье потомственных петербуржцев, живших на Васильевском острове, родился Миша Драгилев, впоследствии выдающийся математик и замечательный человек, судьба которого оказалась неразрывно связанной с физматом (мехматом) Ростовского (Южного федерального) университета.

Призванный в армию незадолго до начала Великой Отечественной войны, в мае 1941 г., он прошел всю войну. В качестве корректировщика артиллерийского огня воевал в составе 8-го гвардейского пушечного артиллерийского полка на Ленинградском и Волховском фронтах, освобождал Тихвин, принимал участие в тяжелых боях во время Любаньской и Синявинской операций, в наступательных операциях 1943–1944 гг. в направлениях Новгорода и Луги, сражался на Карельском перешейке. За боевые заслуги М.М. Драгилев был награжден медалями «За оборону Ленинграда» и «За победу над Германией в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.».

После демобилизации в 1946 г. вчерашний фронтовик поступил на физико-математический факультет Ростовского университета. Проявив особую склонность к изучению математического анализа и теории функций комплексного переменного, он на 3-м курсе принял активное участие в конкурсе на лучшее решение весьма трудных задач и стал его победителем, причём жюри отметило высокий уровень представленной работы. Через полтора года, в ноябре 1950-го, под руководством профессора М.Г. Хапланова пятикурсник Михаил Драгилев выступил с докладом «О решении некоторых типов бесконечных систем линейных уравнений» на студенческой научной конференции.

В июне 1951 г. после защиты диплома М.М. Драгилев был направлен по распределению в г. Новочеркасск, где проработал в Новочеркасском инженерно-мелиоративном институте на кафедре высшей математики до 1958 г., а потом вернулся в Ростов-на-Дону на кафедру высшей математики Ростовского института сельскохозяйственного машиностроения (ныне – ДГТУ). На протяжении всех этих лет он увлечённо исследовал весьма сложные научные проблемы абсолютности и квазиэквивалентности базисов в пространстве аналитических функций в круге. Их решение стало основой его кандидатской диссертации «Некоторые вопросы теории базиса пространства аналитических функций», защищенной в Харькове в 1959 г. По мнению многих ведущих специалистов-математиков и членов диссертационного совета, полученные в ней результаты



вполне заслуживали присуждения докторской степени. Впоследствии В.П. Захарюта, в будущем – профессор и коллега М.М. Драгилева, а тогда пятикурсник, вспоминал: «Мы регулярно принимали участие в областном математическом семинаре под руководством Хапланова и были под сильным впечатлением от блестящего результата М.М. Драгилева... Он поразил нас применением тонких методов функционального анализа к решению проблемы, которая ставилась в терминах классического анализа».

Важным в судьбе учёного стал 1965 г. Во-первых, он был приглашен на работу в родной университет; во-вторых, в «Математическом сборнике» была опубликована его фундаментальная работа «О правильных базисах в ядерных пространствах». Введённое в ней понятие правильного базиса и новые методы исследований, опирающиеся на это понятие, оказались весьма плодотворными и получили широкое распространение. Появились в этой статье и два важных класса пространств Фреше – они были определены в терминах классических линейных инвариантов, но М.М. Драгилев выявил на классе пространств с правильным базисом их интерполяционную природу. В результате интерполяционные методы стали широко применяться для изоморфной классификации пространств, не имеющих правильного базиса. Наконец, введённые учёным в рассмотрение классы пространств Кёте (обобщающие классы центров шкал в направлении нелинейной интерполяции норм) оказались весьма популярными, их изучением занялись учёные не только в Ростове-на-Дону, но и в других странах (США, Германия, Турция, Нидерланды, Швеция).

Некоторое представление о научных интересах и наиболее резонансных, кроме уже отмеченных выше, результатах М.М. Драгилева дает следующий краткий обзор его публикаций. Его работа 1962 г. в «Докладах Академии наук СССР» стала отправной точкой для целого цикла исследований, посвященных решению проблем существования и описания продолжаемых базисов. В 1970 г. в «Математических заметках» в соавторстве с его учеником, будущим профессором В. П. Кондаковым, были введены ультраядерные пространства Фреше и доказано существование в них базиса. Наконец, в 1974 г. в «Докладах Академии наук СССР» вышла выполненная вместе с В.П. Захарютой и Ю.Ф. Коробейником статья, в которой исследовалась глубокая двойственная связь между базисностью системы элементов в локально выпуклых пространствах и интерполяционной задачей для значений функционалов на этой системе. Впоследствии она стала одной из самых цитируемых работ М.М. Драгилева и основой для многочисленных исследований по теории базиса и интерполяции в пространствах аналитических функций.



Глубокие результаты по теории базиса и методы, разработанные М.М. Драгилевым для их доказательства, составили основное содержание его докторской диссертации, блестяще защищенной им в 1971 г. в Харьковском государственном университете. Однако утверждение ее в ВАК и присуждение степени доктора наук состоялись лишь спустя 6 лет после защиты, и то только вслед за личным обращением М.М. Драгилева к председателю Совета министров СССР А.Н. Косыгину с просьбой даже не об утверждении, а хотя бы о рассмотрении работы по существу. Самому учёному это стоило двух инфарктов, а его учитель М.Г. Хапланов, остро переживавший несправедливость, не дожидая торжества справедливости нескольких месяцев. Позднее результаты этой диссертации и дальнейшее их развитие в трудах самого М.М. Драгилева и других известных математиков были изданы в виде научной монографии «Базисы в пространствах Кёте» (первое издание вышло в 1983 г.; второе, существенно переработанное – в 2003 г.).

В 1985 г. в связи с празднованием 40-летия Победы Михаил Михайлович был награжден орденом Отечественной войны II степени.

Весом вклад М.М. Драгилева в формирование и развитие научных школ. Методы и идеи, предложенные им, были развиты, обобщены и нашли применение в работах

учеников (В.П. Кондаков, В.И. Баран, В.В. Каширин, А.Х. Олейников, Е.О. Басангова, В.М. Грачев, Т.И. Абанина), на них опирались в своих исследованиях известные математики разных стран, такие как С. Ролевич, А. Дубинский, А.И. Маркушевич, В.П. Захарюта, Р. Майзе, Д. Фогт, М.С. Раманужан, Ди Гранде ди Кимпе, А. Айтуна, Й. Кроне, Т. Терзиоглу, Дж. Вагнер, М. Линдстрем, К. Ньюберг, М.М. Коджатепе и др.

Многогранной и продуктивной была преподавательская и организаторская работа М.М. Драгилева. Шестидесятые годы прошлого века, в середине которых, как уже отмечалось выше, он стал сотрудником Ростовского государственного университета, были для Ростовской математической школы интересными и напряженными. В 1961 г. физмат разделился на физический и механико-математический факультеты, увеличился приём студентов, внутри отделения математики сформировались три направления подготовки специалистов: математиков-вычислителей (здесь закладывались основы будущего отделения прикладной математики), математиков-педагогов и математиков для народного хозяйства. У последних основными научными направлениями стали краевые задачи теории функций комплексного переменного, теория приближения функций, теория функций, функциональный анализ, дифференциальная геометрия в целом. Профессионализм Михаила Михайловича Драгилева, его универсальная математическая подготовка, эрудиция, добросовестность и увлечённость работой оказались необходимы быстроразвивающемуся новому факультету. Можно много говорить о замечательных спецкурсах, которые он готовил и читал на протяжении всей своей педагогической деятельности, – все они были посвящены самым актуальным научным достижениям и отличались глубиной и насыщенностью. Но, бесспорно, главным достижением стала разработка на очень высоком научном и методическом уровне современного курса теории вероятностей и математической статистики; частично итоги этой работы были подведены в опубликованной в 2002 г. издательством «Вузовская книга» монографии «Лекции по теории вероятностей».

Выдающиеся научные достижения М.М. Драгилева навсегда вписали яркую страницу в историю Ростовской математической школы и стали весомым вкладом в ее признание в ведущих научных центрах не только России, но и всего мира.

Михаил Михайлович немного не дожил до своего столетия. В последние годы своей жизни он делился своими воспоминаниями о войне, прожитой жизни, мехмате, учителях и учениках, начал писать стихи, посвященные войне. Для всех, кто знал его и общался с ним, он останется в памяти как многогранная личность и образец истинного интеллигента, сочетавшего в себе общую эрудицию и скромность с научной и человеческой принципиальностью.

100-летие со дня рождения М.М. Драгилева было отмечено в рамках международной математической конференции *Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis* (Ростов-на-Дону, 21–26 августа 2022 г.).



А.В. Абанин, А.О. Ватульян, М.И. Карякин, С.Н. Мелихов, Ю.С. Налбандян

Научная статья

УДК 517.9

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-78-82

СТЕПЕННАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ И ЭРГОДИЧНОСТЬ В СРЕДНЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Александр Васильевич Абанин^{1✉}, *Варвара Олеговна Костина*²

^{1, 2} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

¹ Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

¹ avabanin@sfedu.ru ✉

² varkovalenko@sfedu.ru

Аннотация. В последние два десятилетия исследования многих известных специалистов посвящены топологическим и динамическим свойствам классических операторов на весовых банаховых пространствах голоморфных функций с равномерными оценками относительно данного радиального веса. К настоящему времени исчерпывающие результаты установлены лишь для описания тех пространств, в которых эти операторы являются ограниченными или компактными. В то же время их динамическое поведение изучено только для пространств целых функций весьма специального типа, задаваемых степенно-показательными весами. В настоящей работе рассматриваются некоторые динамические свойства оператора дифференцирования на весовых пространствах целых функций общего вида. За счет использования сопряженных по Юнгу с функциями, определенным образом построенными по весам, для норм степеней этого оператора на любом из таких пространств установлены оценки снизу и показано, что при некоторых общих дополнительных ограничениях на веса эти оценки превращаются в асимптотические равенства. В качестве приложений установлены условия на веса, при которых оператор дифференцирования является степенно ограниченным или равномерно эргодическим в среднем на соответствующих пространствах. Показано, что полученные результаты содержат предшествующие в качестве частных случаев.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, весовые банаховы пространства целых функций, степенно ограниченный оператор, эргодический в среднем оператор

Для цитирования: Абанин А.В., Костина В.О. Степенная ограниченность и эргодичность в среднем дифференциального оператора в весовых пространствах целых функций // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 78–82.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

POWER BOUNDEDNESS AND MEAN ERGODICITY OF THE DIFFERENTIATION OPERATOR ON WEIGHTED SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS

Alexander V. Abanin^{1✉}, *Varvara O. Kostina*²

^{1, 2} Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

¹ Southern Mathematical Institute – Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, Russia

¹ avabanin@sfedu.ru ✉

² varkovalenko@sfedu.ru

© Абанин А.В., Костина В.О., 2022

Abstract. During last two decades investigations of many known specialists are devoted to the topological and dynamical properties of the classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions having uniform estimates with respect to a given radial weight. At present complete results are established for only the problem of a characterization of those spaces in which these operators are bounded or compact. At the same time, their dynamical behavior is studied only for the spaces of a very special type given by power-exponential weights. In this paper we consider some of the dynamical properties of the differentiation operator on weighted spaces of a general kind. By using Young conjugate with the function constructed from a weight by a certain rule, we obtain low estimates for the norms of powers of this operator on every such a space and show that under some general additional conditions these estimates turn into asymptotic equalities.

We apply these results to establish some conditions on weights under which the differentiation operator is power bounded or uniformly mean ergodic on the corresponding spaces. It is shown that the obtained results contain previous ones as particular cases.

Keywords: differentiation operator, weighted Banach spaces of entire functions, power bounded operator, mean ergodic operator

For citation: Abanin A.V., Kostina V.O. Power Boundedness and Mean Ergodicity of the Differentiation Operator on Weighted Spaces of Entire Functions. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):78-82. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Топологические и динамические свойства оператора дифференцирования в весовых пространствах целых функций с *sup*-нормой в последние два десятилетия привлекают внимание многих специалистов [1–9]. Настоящая статья посвящена свойствам степенной ограниченности и равномерной эргодичности в среднем этого оператора в пространствах, задаваемых радиальными весами общего вида.

Напомним необходимые для дальнейшего сведения. Радиальным весом (далее – просто весом) на комплексной плоскости \mathbb{C} называется функция $v(z) = v(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, где $v: [0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$, непрерывно возрастающая на $[0; \infty)$, для которой $r^n = o(v(r))$ при $r \rightarrow \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Каждый вес v задает банахово пространство целых функций $H_v := \left\{ f \in H(\mathbb{C}): \|f\|_v := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}$ и его замкнутое подпространство $H_v^0 := \left\{ f \in H(\mathbb{C}): \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{v(z)} = 0 \right\}$.

Отметим, что условие $r^n = o(v(r))$ при $r \rightarrow \infty$ ($n \in \mathbb{N}$) эквивалентно тому, что пространство H_v содержит все полиномы.

Как известно [1, 5, 6], такие свойства оператора D в пространствах H_v , $H_{v,0}$ как вид спектра, степенная ограниченность и (равномерная) эргодичность в среднем непосредственным образом зависят от асимптотической оценки норм $\|D^n\|_v$ степеней оператора D при $n \rightarrow \infty$.

К настоящему времени подобные оценки известны лишь для весов вида $v(r) = r^{-a} e^{\alpha r}$, где $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Точнее, обозначим через $H_{a,\alpha}$ и $H_{a,\alpha}^0$ пространства H_v и H_v^0 , задаваемые этими весами, а через $\|\cdot\|_{a,\alpha}$ – нормы элементов и операторов в $H_{a,\alpha}$ или $H_{a,\alpha}^0$. Из [5, proposition 3.7] (см. также близкое [6, proposition 5.9]) следует, что

$$1) \text{ при } a > 0 \quad \|D^n\|_{a,\alpha} = O\left(n! \left(\frac{e\alpha}{n-a}\right)^{n-a}\right), \quad (1)$$

$$n! \left(\frac{e\alpha}{n+a}\right)^{n+a} = O(\|D^n\|_{a,\alpha}); \quad (2)$$

$$2) \text{ при } a \leq 0 \quad \|D^n\|_{a,\alpha} \approx n! \left(\frac{e\alpha}{n-a}\right)^{n+a}, \quad (3)$$

причем для $a = 0$ имеет место обычное равенство. Здесь и далее символ $X_n \approx Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, для положительных последовательностей $(X_n)_{n=1}^\infty$ и $(Y_n)_{n=1}^\infty$ означает, что при некотором $A \geq 1$ имеем $\frac{1}{A} X_n \leq Y_n \leq A X_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что оценка сверху в (1) получена на основании результата [1, proposition 1].

Предложение 1. Пусть $v(r)$ – такой вес, что $\ln v(r)$ – вогнутая на $[0; \infty)$ функция с $v(0) = 1$. Тогда оператор D ограничен на H_v ,

$$\|D^n\|_v \leq n! r^{-n} v(r), r > 0, n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

и спектр $\sigma(D)$ оператора D совпадает с кругом $\Delta_a := \{z: |z| \leq a\}$, где $a := \lim_{r \rightarrow \infty} \ln \frac{v(r)}{r}$.

Цель настоящей статьи – распространить оценки (1)–(3) на веса общего вида и применить их к изучению динамических свойств оператора дифференцирования.

С каждым весом v свяжем следующие две функции:

$$\Phi_v(r) := \ln v(r), r \geq 0; \quad \varphi_v(x) := \Phi_v(e^x), x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что требование $r^n = o(v(r))$ при $r \rightarrow \infty$ эквивалентно тому, что $x = o(\varphi_v(x))$ при $x \rightarrow +\infty$ или $\ln r = o(\Phi_v(r))$ при $r \rightarrow \infty$.

Перед формулировкой результата об оценке $\|D^n\|_v$ снизу напомним, что сопряженной по Юнгу с функцией $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$, для которой $x = o(\varphi(x))$ при $x \rightarrow +\infty$, называется функция $\varphi^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(x)), y \geq 0$.

Предложение 2. Для любого веса $v(r)$ имеет место оценка $\|D^n\|_v \geq n! e^{-\varphi_v^*(n)}, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для мономов $z^n \in H_v$ имеем $D^n z^n = n!$ и

$$\|z^n\|_v = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|z^n|}{v(z)} = \exp \sup_{r > 0} (n \ln r - \ln v(r)) = \exp \sup_{x \in \mathbb{R}} (nx - \varphi_v(x)) = e^{\varphi_v^*(n)}.$$

$$\text{Поэтому } \|D^n\|_v \geq \frac{\|D^n z^n\|_v}{\|z^n\|_v} = n! e^{-\varphi_v^*(n)}.$$

Для весов, удовлетворяющих условиям предложения 1, получаем точную формулу для вычисления норм $\|D^n\|_v$. Именно справедлива

Теорема 1. Пусть вес $v(r)$ таков, что $\Phi_v(r)$ – вогнутая на $[0; \infty)$ функция, причем $\Phi_v(0) = 0$. Тогда

$$\|D^n\|_v = n! e^{-\varphi_v^*(n)}, n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Доказательство. Из оценки (4) при всех $r > 0$ имеем

$$\|D^n\|_v \leq n! r^{-n} v(r) = n! r^{-n} e^{-\Phi_v(r)} = n! \exp(-n \ln r + \Phi_v(r)).$$

$$\text{Поэтому } \|D^n\|_v \leq n! \exp\left(-\sup_{x \in \mathbb{R}} (nx - \varphi_v(x))\right) = n! e^{-\varphi_v^*(n)}.$$

Остается воспользоваться предложением 2, чтобы завершить доказательство.

Замечание. Вогнутость $\Phi_v(r)$ на всем луче $[0; \infty)$ и равенство $\Phi_v(0) = 0$ для конкретных весов, используемых в предложениях, имеют место далеко не всегда. Гораздо чаще встречаются веса, для которых $\Phi_v(r)$ вогнута на $[r_0; \infty)$ при некотором $r_0 > 0$. В таком случае определим функцию $\Phi(r) = \begin{cases} \Phi'_v(r_0) \cdot r, & 0 \leq r < r_0, \\ \Phi_v(r_0) + a, & r > r_0, \end{cases}$ где $a := \Phi'_v(r_0) \cdot r_0 - \Phi_v(r_0)$. Здесь и далее $\Phi'_v(r)$ – правая производная функции $\Phi_v(r)$. Ясно, что $\Phi(r)$ вогнута на $[0; \infty)$ с $\Phi(0) = 0$, $\tilde{v}(r) := e^{\Phi(r)}$ – вес и $c \cdot v(r) \leq \tilde{v}(r) \leq C \cdot v(r)$, где $c := \min\{1, \frac{1}{v(r_0)}, e^a\}$ и $C := \max\{\frac{\Phi'_v(r_0) \cdot r_0}{v(0)}, e^a\}$. Отсюда следует, что $\frac{1}{c} \|T\|_{\tilde{v}} \leq \|T\|_v \leq \frac{1}{c} \|T\|_{\tilde{v}}$ для любого линейного ограниченного оператора T на $H_v = H_{\tilde{v}}$. Применив равенство (5) из теоремы 1 к весу \tilde{v} , заключаем, что справедливо асимптотическое равенство $\|D^n\|_v \approx n! e^{-\varphi_v^*(n)}, n \in \mathbb{N}$, где v – вес, для которого $\varphi_v(r)$ вогнута на $[r_0; \infty)$.

Введем необходимые для дальнейшего изложения понятия из теории динамики линейных операторов в банаховых пространствах [10]. Линейный оператор $T: E \rightarrow E$, где E – банахово пространство, называется степенно ограниченным, если последовательность его степеней $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ является равномерно ограниченной, т.е. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$. T называется эргодичным в

среднем, если последовательность средних $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T^n x\right)_{N \in \mathbb{N}}$ сходится в E для любого $x \in E$.

Если последовательность операторов $\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N T^n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ на E сходится в операторной норме, то T называется равномерно эргодичным в среднем.

Теорема 2. Для веса $v(r)$ положим $A_v := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n}{e} - \varphi_v^*(n) \right)$.

Верны следующие утверждения:

- а) если $A_v = +\infty$, то оператор $D: H_v \rightarrow H_v$ не является степенно ограниченным;
- б) если вес $v(r)$ таков, что функция $\Phi_v(r)$ вогнута на $[r_0; \infty)$ при некотором $r_0 \geq 0$, то для $A_v < +\infty$ оператор $D: H_v \rightarrow H_v$ является степенно ограниченным, а для $A_v = -\infty$ он будет еще и равномерно эргодичным в среднем.

Доказательство. Из формулы Стирлинга следует, что при некоторых $\theta_n \in (0; 1)$ и всех $n \in \mathbb{N}$

$$\ln(n! e^{-\varphi_v^*(n)}) = \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{\theta_n}{12n} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n}{e} - \varphi_v^*(n). \text{ Поэтому}$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n}{e} - \varphi_v^*(n) \leq \ln(n! e^{-\varphi_v^*(n)}) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n}{e} - \varphi_v^*(n) + C_0, n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где $C_0 := \frac{1}{2} \ln 2\pi e$.

Если $A_v = +\infty$, то из левой части неравенства (6) и из предложения 2 получаем, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|D^n\|_v = +\infty$ и, значит, $D : H_v \rightarrow H_v$ не является степенно ограниченным.

Пусть функция $\Phi_v(r)$ вогнута на $[r_0; \infty)$ при некотором $r_0 > 0$. Применив теорему 1, замечание после нее и правую часть оценки (6), имеем при некотором $C \geq 1$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|D^n\|_v \leq C \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n! e^{-\varphi_v^*(n)}) \leq C e^{A_v}.$$

Отсюда следует, что при $A_v < +\infty$ оператор $D : H_v \rightarrow H_v$ является степенно ограниченным. При $A_v = -\infty$ получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^n\|_v = 0$. Тогда $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D^n \right\|_v \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|D^n\|_v = 0$, и, значит, этот оператор дополнительно является равномерно эргодичным в среднем.

Следствие 1. Если при некотором $a < \frac{1}{2}$ вес $v(r)$ удовлетворяет условию $r^{-a} e^r = O(v(r))$ при $r \rightarrow \infty$, то оператор $D : H_v \rightarrow H_v$ не является степенно ограниченным.

Доказательство. В самом деле, по условию существует такое $c > 0$, что $v(r) \geq cr^{-a} e^r$ при всех $r \geq 1$. Это эквивалентно тому, что $\varphi_v(x) \geq e^x - ax + \ln c$ при всех $x \geq 0$. Поэтому при всех $y \geq y_0$ $\varphi_v^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - \varphi_v(x)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} ((y+a)x - e^x) - \ln c = (y+a) \ln \frac{y+a}{e} - \ln c$. Отсюда

$$\text{следует, что при всех } n \geq n_0 \quad \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n}{e} - \varphi_v^*(n) \geq \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n}{e} - (n+a) \ln \frac{n+a}{e} + \ln c =$$

$$= (n+a) \ln \frac{n}{n+a} + \left(\frac{1}{2} - a\right) \ln \frac{n}{e} + \ln c \rightarrow +\infty, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Значит, $A_v < +\infty$ и остается применить утверждение а) теоремы 2.

Следствие 2. Пусть вес $v(r)$ таков, что функция $\Phi_v(r)$ вогнута на $[r_0; \infty)$ при некотором $r_0 \geq 0$. Если $v(r) = O(r^{-\frac{1}{2}} e^r)$ при $r \rightarrow \infty$, то оператор $D : H_v \rightarrow H_v$ является степенно ограниченным. Если же существует такое $a > \frac{1}{2}$, что $v(r) = O(r^{-a} e^r)$ при $r \rightarrow \infty$, то он является дополнительно равномерно эргодичным в среднем.

Доказательство. Пусть $v(r) = O(r^{-a} e^r)$ при $r \rightarrow \infty$ для некоторого $a \geq \frac{1}{2}$. Применим соображения, аналогичные использованным в доказательстве предыдущего следствия. Найдем постоянную $C > 0$ такую, что $\varphi_v^*(y) \geq (y+a) \ln \frac{y+a}{e} - \ln c$ при всех $y \geq 0$, и выведем из этого неравенство $\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{n}{e} - \varphi_v^*(n) \leq (n+a) \ln \frac{n}{n+a} + \left(\frac{1}{2} - a\right) \ln \frac{n}{e} + \ln C, n \in \mathbb{N}$.

Ясно, что правая часть при $n \rightarrow \infty$ стремится к $-\frac{1}{2} + \ln C$ при $a = \frac{1}{2}$ и к $-\infty$ при $a > \frac{1}{2}$. Используя утверждение б) теоремы 1, получаем нужное.

Нетрудно видеть, что следствия 1 и 2 содержат в качестве частных случаев результаты статьи [5] о наличии или отсутствии у оператора дифференцирования свойств степенной ограниченности и равномерной эргодичности в среднем. Ясно также, что они применимы и к другим, ранее не исследовавшимся в этом направлении, пространствам. Например, рассмотрим вес вида $v(r) = r^{-a} e^{r^\rho}, a \in \mathbb{R}, 0 < \rho < 1$. Для него $\Phi_v(r) = r^\rho - a \ln r$ вогнута на $[r_0; \infty)$ при некотором $r_0 > 0$. При этом $v(r) = o(e^{r^\sigma})$ при $r \rightarrow \infty$ для $\sigma \in (\rho; 1)$. Тем более $v(r) = O(r^{-1} e^r)$ при $r \rightarrow \infty$, и, значит, по следствию 2 для таких весов оператор $D : H_v \rightarrow H_v$ степенно ограничен и равномерно эргодичен в среднем.

Список источников

1. Atzmon A., Brive B. Surjectivity and invariant subspaces of differential operators on weighted Bergman spaces of entire functions // Contemp. Math. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2006. Vol. 404. P. 27–39.
2. Harutyunyan A., Lusky W. On the boundedness of the differentiation operator between weight spaces of holomorphic functions // Studia Math. 2008. Vol. 184, № 3. P. 233–247.
3. Bonet J. Dynamics of differentiation operator on weighted spaces of entire functions // Math. Z. 2009. Vol. 261, № 3. P. 649–657.

4. Bonet J., Bonilla A. Chaos of the differentiation operator on weighted Banach spaces of entire functions // *Complex Anal. Oper. Theory*. 2013. Vol. 7, № 1. P. 33–42.
5. Beltran M.J., Bonet J., Fernandez C. Classical operators on Banach weighted spaces of entire functions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2013. Vol. 141, № 12. P. 4293–4303.
6. Beltran M.J. Dynamics of differentiation and integration operators on weighted spaces of entire functions // *Studia Math.* 2014. Vol. 221, № 1. P. 35–60.
7. Abanin A.V., Tien P.T. Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // *Math. Nachr.* 2017. Vol. 290, № 8–9. P. 1144–1162.
8. Abanin A.V., Tien P.T. Invariant subspaces for classical operators on weighted spaces of holomorphic functions // *Integr. Equ. Oper. Theory*. 2017. Vol. 89, № 3. P. 409–438.
9. Abanin A.V., Tien P.T. Compactness of classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // *Collect. Math.* 2018. Vol. 69, № 1. P. 1–15.
10. Krengel U. Ergodic Theorems // *De Gruyter Studies in Mathematics*. Berlin: Gruyter, 1985. Vol. 6. 357 p.

References

1. Atzmon A., Brive B. Surjectivity and invariant subspaces of differential operators on weighted Bergman spaces of entire functions. *Contemp. Math. Amer. Math. Soc.* Providence, RI, 2006;404:27-39.
2. Harutyunyan A., Lusky W. On the boundedness of the differentiation operator between weight spaces of holomorphic functions. *Studia Math.* 2008;184(3):233-247.
3. Bonet J. Dynamics of differentiation operator on weighted spaces of entire functions. *Math. Z.* 2009;261(3):649-657.
4. Bonet J., Bonilla A. Chaos of the differentiation operator on weighted Banach spaces of entire functions. *Complex Anal. Oper. Theory*. 2013;7(1):33-42.
5. Beltran M.J., Bonet J., Fernandez C. Classical operators on Banach weighted spaces of entire functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2013;141(12):4293-4303.
6. Beltran M.J. Dynamics of differentiation and integration operators on weighted spaces of entire functions. *Studia Math.* 2014;221(1):35-60.
7. Abanin A.V., Tien P.T. Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions. *Math. Nachr.* 2017;290(8-9):1144-1162.
8. Abanin A.V., Tien P.T. Invariant subspaces for classical operators on weighted spaces of holomorphic functions. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 2017;89(3):409-438.
9. Abanin A.V., Tien P.T. Compactness of classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions. *Collect. Math.* 2018;69(1):1-15.
10. Krengel U. Ergodic Theorems. *De Gruyter Studies in Mathematics*. Berlin: Gruyter Publ.; 1985;6. 357 p.

Информация об авторах

А.В. Абагин – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и геометрии, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет; заведующий отделом математического анализа, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН.

В.О. Костина – магистрант, кафедра математического анализа и геометрии, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the authors

A.V. Abanin - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Mathematical Analysis and Geometry Department, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University; Head of the Department of Mathematical Analysis, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences.

V.O. Kostina - Master Student, Department of Mathematical Analysis and Geometry, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 07.07.2022; одобрена после рецензирования 20.07.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 07.07.2022; approved after reviewing 20.07.2022; accepted for publication 15.11.2022.

Научная статья

УДК 517.9

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-83-89

КОМПАКТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Александр Васильевич Абанин^{1✉}, **Юлия Викторовна Кораблина**²

^{1, 2} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^{1, 2} Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

¹ avabanin@sfedu.ru ✉

² ykorablina@sfedu.ru

Аннотация. Формулируются условия компактности классических операторов, действующих из абстрактных квазибанаховых пространств голоморфных в области комплексной плоскости функций в весовое пространство тех же функций с равномерной нормой. Получены абстрактные критерии компактности произвольного линейного оператора на произвольном квазибанаховом пространстве, формулируемые в терминах дельта-функций, и их конкретные реализации в классическом и обобщенном пространствах Фока. Указанные результаты применены к оператору весовой композиции. Сформулированы условия компактности данного оператора в терминах норм дельта-функций в соответствующих сопряженных пространствах, что существенно обобщает известные результаты Н. Зорбоска. Именно значительно расширен класс весовых пространств голоморфных в области функций с равномерными нормами, в которых формулируются условия компактности произвольного линейного оператора и оператора весовой композиции.

Ключевые слова: оператор весовой композиции, пространства Фока, весовые квазибанаховы пространства голоморфных функций, компактный оператор

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых учёных – кандидатов наук, проект МК-160.2022.1.1.

Для цитирования: Абанин А.В., Кораблина Ю.В. Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 83–89.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

COMPACTNESS OF LINEAR OPERATORS ON QUASI-BANACH SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Alexander V. Abanin^{1✉}, **Julia V. Korablina**²

^{1, 2} Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

^{1, 2} Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, Russia

¹ avabanin@sfedu.ru ✉

² ykorablina@sfedu.ru

© Абанин А.В., Кораблина Ю.В., 2022

Abstract. We state conditions under which some classical operators acting from abstract quasi-Banach spaces of functions holomorphic in a plain domain into a weighted space of the same functions with sup-norm are compact. It is obtained abstract criteria for the compactness of a linear operator on an arbitrary quasi-Banach space which are stated in terms of delta-functions and formulate their realizations for both classical and generalized Fock spaces. The above results are applied to the weighted composition operator. It is established some conditions for the compactness of this operator which are given in terms of norms of delta-functions in the corresponding dual spaces. These results are essential generalizations of the known Zorboska's ones. Namely, we significantly extended the class of weighted spaces of holomorphic functions with uniform norms for which one can state some conditions for the compactness of an arbitrary linear operator or the weighted composition operator.

Keywords: weighted composition operator, Fock spaces, weighted quasi-Banach spaces of holomorphic functions, compact operator

Acknowledgments: this work was supported by a grant from the President of the Russian Federation for young scientists with PhDs, project MK-160.2022.1.1.

For citation: Abanin A.V., Korablina J.V. Compactness of Linear Operators on Quasi-Banach Spaces of Holomorphic Functions. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):83-89. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Компактность классических операторов (дифференцирования, интегрирования, Вольтерра, весовой композиции и др.) изучалась в работах многих авторов (см., напр., [1–11] и библиографию в них). Недавно Н. Зорбоска [12] установила критерии ограниченности и компактности абстрактного линейного оператора, действующего из абстрактного банахова пространства голоморфных в единичном круге функций в пространство таких же функций с sup-нормой относительно некоторого радиального веса. В статье [13] её результаты об ограниченности операторов были распространены на произвольные области комплексной плоскости и веса общего вида. С их помощью получены условия ограниченности операторов весовой композиции, дифференцирования и Вольтерра для более общих, чем в [12], шкал весовых пространств голоморфных функций в единичном круге и обобщенных пространств Фока целых функций. В настоящей статье аналогичное развитие подхода из [12] осуществлено в отношении компактности абстрактных линейных операторов в произвольных (квази) банаховых пространствах голоморфных функций.

Полученные на этом пути абстрактные критерии применяются к конкретным классическим операторам. При этом по сравнению с предшествующими исследованиями удается существенно расширить класс весовых пространств, в которых дается полное описание компактности этих операторов.

Критерий компактности абстрактного линейного оператора

Пусть G – область в комплексной плоскости \mathbb{C} ; $H(G)$ – пространство всех голоморфных в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах из G . Всюду далее X – квазибанахово пространство голоморфных в G функций с квазинормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$. Напомним, что квазинорма отличается от нормы только тем, что она удовлетворяет ослабленному варианту неравенства треугольника: $\exists K \geq 1: \|f + g\| \leq K(\|f\| + \|g\|), \forall f, g \in X$.

Как хорошо известно, каждое квазинормируемое пространство метризуемо. Именно, существует такая инвариантная относительно сдвигов метрика ρ на X , что $\rho(f, g) \leq \|f - g\|^p \leq 2\rho(f, g), \forall f, g \in X$, где $\rho := 1/\log_2(2K)$. При $K = 1$ получаем обычную норму на X , и X тогда является нормированным пространством, а в случае полноты – банаховым. Через X^* , как обычно, обозначается банахово пространство всех линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\varphi\|^* := \sup_{\|f\| \leq 1} (|\varphi(f)|), \varphi \in X^*$.

Весом на G называется произвольная непрерывная положительная функция на G . Каждый вес v на G порождает банахово пространство $H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}$ и его замкнутое подпространство $H_v^0(G) := \left\{ f \in H(G) : \lim_{z \rightarrow \partial G} \frac{|f(z)|}{v(z)} = 0 \right\}$.

Здесь и далее для функции $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ запись $\lim_{z \rightarrow \partial G} g(z) = 0$ означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists K$ – компакт в $G: |g(z)| \leq \varepsilon, \forall z \in G \setminus K$. Как отмечено в [13], при любом $z \in G$ δ_z -функция $\delta_z: f \mapsto f(z)$ является элементом $(H_v(G))^*$.

Следующий критерий доказывается методом, предложенным в [8, proposition 3.11] для композиционных операторов, пространств Харди и Бергмана (см. также [12, lemma 3.1] для произвольного линейного оператора на банаховых пространствах голоморфных функций).

Лемма 1. Пусть $T: H(G) \rightarrow H(G)$ – линейный непрерывный оператор и v – произвольный вес на G . Следующие условия эквивалентны:

- (i) $T: X \rightarrow H_v(G)$ компактен.
- (ii) Для любой ограниченной последовательности $(f_n)_{n=1}^\infty$ в X , сходящейся к нулю в $H(G)$, последовательность $(Tf_n)_{n=1}^\infty$ сходится к нулю в $H_v(G)$.

Теперь мы готовы привести основной результат данного раздела.

Теорема 1. Пусть T и v – те же, что и в лемме 1. Сформулируем следующие условия:

- (i) $T: X \rightarrow H_v^0(G)$ компактен.
- (ii) $T: X \rightarrow H_v(G)$ компактен и $T(X) \subseteq H_v^0(G)$.
- (iii) $\delta_z \circ T \in X^*$ при любом $z \in G$ и $\lim_{z \rightarrow \partial G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} = 0$.

Тогда справедливы утверждения: (i) \Leftrightarrow (ii) и (iii) \Rightarrow (i). Если X – банахово пространство, то (i) \Rightarrow (iii), и, таким образом, все три условия эквивалентны.

Доказательство. Будет использоваться метод, предложенный в [5, theorem 8] для композиционных операторов (см. также [12, theorem 3.2 (a)]).

Эквивалентность (i) \Leftrightarrow (ii) тривиальна. Покажем далее, что (iii) \Rightarrow (i). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (iii) для него найдется компакт K в G , для которого $\|\delta_z \circ T\|^* \leq \varepsilon, \forall z \in G \setminus K$, или

$$|(Tf)(z)| \leq \varepsilon \|f\|_v, \forall z \in G \setminus K, \forall f \in X. \quad (1)$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\lim_{z \rightarrow \partial G} \frac{|(Tf)(z)|}{v(z)} = 0$.

Значит, $(Tf)(z) \in H_v^0(G), \forall f \in X$, т.е. $T(X) \subseteq H_v^0(G)$. Остается проверить компактность $T: X \rightarrow H_v(G)$. Для этого воспользуемся леммой 1.

Пусть $(f_n)_{n=1}^\infty$ – ограниченная в X последовательность, сходящаяся в $H(G)$ к нулю. Тогда из (1) заключаем, что

$$\sup_{z \in G \setminus K} \frac{|(Tf_n)(z)|}{v(z)} \leq \varepsilon M, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где $M := \sup_n \|f_n\| < \infty$. Далее в силу непрерывности и положительности веса v на G имеем $\min_{z \in K} v(z) =: m > 0$. По условию оператор $T: H(G) \rightarrow H(G)$ непрерывен и $f_n \rightarrow 0$ в $H(G)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому найдется такой номер N , что $\max_{z \in K} |(Tf_n)(z)| \leq \varepsilon m, \forall n \geq N$. Тогда

$$\sup_{z \in K} \frac{|(Tf_n)(z)|}{v(z)} \leq \varepsilon, \forall n \geq N.$$

Объединив это неравенство с (2), имеем при всех $n \geq N$

$$\|Tf_n\|_v = \sup_{z \in G} \frac{|(Tf_n)(z)|}{v(z)} = \max \left\{ \sup_{z \in K} \frac{|(Tf_n)(z)|}{v(z)}, \sup_{z \in G \setminus K} \frac{|(Tf_n)(z)|}{v(z)} \right\} \leq \varepsilon(M + 1).$$

Значит, $Tf_n \rightarrow 0$ в $H_v(G)$ при $n \rightarrow \infty$ и по лемме 1 оператор $T: X \rightarrow H_v(G)$ компактен.

В случае, когда X – банахово пространство, импликация (i) \Rightarrow (iii) доказывается точно так же, как в [12, theorem 3.2 (a)] для единичного круга. Поэтому мы эту часть доказательства опускаем.

В следующем разделе мы применим теорему 1 к конкретным операторам и обобщенным пространствам Фока целых функций. Напомним в связи с этим, что случай пространств голоморфных в единичном круге функций достаточно полно исследован в статье [12].

Компактность линейных операторов в обобщенных пространствах Фока

Введем для дальнейшего изложения обозначения и определения из [13].

Пусть $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная в \mathbb{C} функция, для которой $A_\psi := \int_{\mathbb{C}} e^{-\psi(z)} dA(z) < \infty$, где $A(z)$ – мера Лебега в $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

При каждом $p \in (0, \infty)$ по ней определяется обобщенное пространство Фока

$$F_p^\psi := \left\{ f \in H(\mathbb{C}): \|f\|_{p,\psi} := \left(\frac{1}{A_\psi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-\psi(z)} dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Для $p = \infty$ полагаем $F_\infty^\psi = H_{e^\psi}(\mathbb{C})$. При $1 \leq p \leq \infty$ это пространство является банаховым, а при $0 < p < 1$ – лишь квазибанаховым.

Через Ψ_0 обозначается класс всех слабо растущих в среднем функций ψ , т.е. таких, что при некотором $C = C(\psi) > 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{\pi} \int_{|\xi| \leq 1} \psi(z + \xi) dA(\xi) \leq \psi(z) + C, \forall z \in \mathbb{C}$.

В [13] отмечено, что если дополнительно известно, что ψ субгармонична в \mathbb{C} , то принадлежность ψ классу Ψ_0 обеспечивается условием

$$\exists C > 0: \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z + e^{i\theta}) d\theta \leq \psi(z) + C, \forall z \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

При этом субгармонические в \mathbb{C} функции ψ , удовлетворяющие условию (3), названы в [13] почти гармоническими.

Теорема 2. Пусть ψ – слабо растущая в \mathbb{C} функция; v – произвольный вес на \mathbb{C} ; u и φ – две целые функции, $p \in (0, \infty)$. Если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)e^{\frac{\psi(\varphi(z))}{p}}}{v(z)} = 0, \quad (4)$$

то оператор весовой композиции $W_{u,\varphi}: F_p^\psi \ni f \mapsto u(z)f(\varphi(z)) \in H_v^0(\mathbb{C})$ является компактным.

Доказательство. В самом деле в данном случае для любой функции f из F_p^ψ

$$\delta_z \circ W_{u,\varphi} f = u(z)f(\varphi(z)) = u(z)\delta_{\varphi(z)} f, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому $\|\delta_z \circ W_{u,\varphi} f\|^* = |u(z)| \|\delta_{\varphi(z)} f\|^*$, где сопряженная норма берется в $X^* = (F_p^\psi)^*$. Из

[13, лемма 2] $\|\delta_{\varphi(z)} f\|^* \leq A e^{\frac{\psi(\varphi(z))}{p}}$. Тогда из условия (4) заключаем, что $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\|\delta_z \circ W_{u,\varphi} f\|^*}{v(z)} = 0$.

Остается воспользоваться теоремой 1, чтобы сделать вывод о том, что оператор $W_{u,\varphi}: F_p^\psi \rightarrow H_v^0(\mathbb{C})$ компактен.

В случае классического пространства Фока F_α^2 , которое получается при $\psi(z) = \alpha|z|^2$ ($\alpha > 0$) и $p = 2$, теорема 2 допускает уточнение и становится критерием.

Следствие. Пусть v – произвольный вес на \mathbb{C} ; u и φ – две целые функции. Оператор весовой композиции $W_{u,\varphi}: F_\alpha^2 \rightarrow H_v^0(\mathbb{C})$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}}{v(z)} = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Пространство F_α^2 является банаховым. Для него, как известно [14, theorem 2.7], $\|\delta_z\|^* = e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}$ (сопряженная норма берется в $(F_\alpha^2)^*$). Отсюда и из теорем 1 и 2 следует, что условие (5) необходимо и достаточно для компактности оператора $W_{u,\varphi}: F_\alpha^2 \rightarrow H_v^0(\mathbb{C})$.

Теорема 2 сформулирована для обобщенных пространств Фока, задаваемых слабо растущими в \mathbb{C} функциями ψ , и в соответствии с отмеченным выше верна для почти гармонических ψ . Проверка почти гармоничности функции является отдельной трудной задачей. В [13] ее удалось осуществить лишь для конкретных функций вида $\psi(z) = \gamma|z|^q$, где $\gamma > 0$ и $0 < q \leq 2$. Следующий результат содержит условия общего характера, при которых некоторая функция является почти гармонической.

Лемма 2. Пусть $\psi(r)$ – возрастающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, дважды дифференцируемая на $[r_0, \infty)$ при некотором $r_0 \geq 0$, и при этом $\sup_{r \geq r_0} \psi''(r) \leq \infty$. Тогда радиальная функция

$\psi(z) := \psi(|z|)$ при некотором $C > 0$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z + e^{i\theta}) d\theta \leq \psi(z) + C, z \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Доказательство. В силу радиальности и непрерывности функции $\psi(z)$ достаточно проверить выполнение (6) для $z = x > 1 + r_0$. Имеем

$$\begin{aligned} C_\psi &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x + e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (\psi(|x + e^{i\theta}|) + \psi(|x + e^{-i\theta}|)) d\theta \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(|x + e^{i\theta}|) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\psi(|x + e^{i\theta}|) + \psi(|x - e^{i\theta}|)) d\theta. \end{aligned}$$

Оценим сначала подынтегральные функции. Очевидно, что $|x + e^{i\theta}| = \sqrt{x^2 + 2x \cos \theta + 1} \leq x + \frac{2x \cos \theta + 1}{2x}$ при всех $x > 0$ и $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Поэтому, используя возрастание $\psi(r)$ и формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем, что при некотором $\gamma \in (x, x + \frac{2x \cos \theta + 1}{2x})$

$$\psi(|x + e^{i\theta}|) \leq \psi\left(x + \frac{2x \cos \theta + 1}{2x}\right) = \psi(x) + \psi'(x) \cdot \frac{2x \cos \theta + 1}{2x} + \psi''(\gamma) \cdot \left(\frac{2x \cos \theta + 1}{2x}\right)^2.$$

Аналогично $|x - e^{i\theta}| = \sqrt{x^2 - 2x \cos \theta + 1} \leq x - \frac{2x \cos \theta - 1}{2x}$ при всех $x > 0$; $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и при некотором $\tilde{\gamma}$, лежащем между x и $x - \frac{2x \cos \theta - 1}{2x}$,

$$\psi(|x - e^{i\theta}|) \leq \psi\left(x - \frac{2x \cos \theta - 1}{2x}\right) = \psi(x) - \psi'(x) \cdot \frac{2x \cos \theta - 1}{2x} + \psi''(\tilde{\gamma}) \cdot \left(\frac{2x \cos \theta - 1}{2x}\right)^2.$$

Применив обе полученные оценки и воспользовавшись тем, что

$$\sup_{r \geq r_0} \psi''(r) =: C < \infty, \text{ получим при всех } x > 1 + r_0 \text{ и } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ что}$$

$$\psi(|x + e^{i\theta}|) + \psi(|x - e^{i\theta}|) \leq 2\psi(x) + \frac{\psi'(x)}{x} + \frac{5}{2}C. \quad (7)$$

Заметим, что при $x > r_0$ $\psi'(x) = \int_{r_0}^x \psi''(t) dt + \psi'(r_0) \leq C(x - r_0) + \psi'(r_0) = Cx + D$, где $D := \psi'(r_0) - Cr_0$. Поэтому из (7) следует, что при всех $x > 1 + r_0$ и $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\psi(|x + e^{i\theta}|) + \psi(|x - e^{i\theta}|) \leq 2\psi(x) + C_1, \text{ где } C_1 := \frac{7}{2}C + D. \text{ Теперь мы готовы оценить } C_\psi:$$

$$C_\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\psi(|x + e^{i\theta}|) + \psi(|x - e^{i\theta}|)) d\theta \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\psi(x) + C_1) dx = \psi(x) + \frac{C_1}{2}, \text{ и доказательство завершено.}$$

Из леммы 2 следует

Предложение 1. Пусть ψ – та же функция, что и в лемме 2, и дополнительно известно, что $\psi(|z|)$ субгармонична в \mathbb{C} . Тогда $\psi(|z|)$ почти гармонична.

Очевидно, что $\psi(z) = \alpha|z|^q, 0 < q \leq 2, \alpha > 0$, удовлетворяет всем условиям предложения 1. Таким образом, предложение 1 содержит в качестве частного случая утверждения из [13] о почти гармоничности функции $\alpha|z|^q$ при указанных α и q .

Из теоремы 2 и предложения 1 непосредственным образом вытекает

Теорема 3. Пусть функция ψ удовлетворяет всем условиям предложения 1; v – произвольный вес на \mathbb{C} ; u и φ – две целые функции и $p \in (0, \infty)$. Если выполнено условие (4), то оператор весовой композиции $W_{u,\varphi}^\psi: F_p^\psi \rightarrow H_v(\mathbb{C})$ компактен.

В заключение заметим, что абстрактный критерий – теорема 1 – применим также и к исследованию свойства компактности оператора Вольтерра в пространствах Фока, задаваемых весами из класса, введенного в работе [7] (см. также заключительную часть статьи [13]).

Список источников

1. Abanin A.V., Tien P.T. Compactness of classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // *Collect. Math.* 2018. Vol. 69, № 1. P. 1–15.
2. Basallote M., Contreras M.D., Hernández-Mancera C., Martin M.J., Paúl P.J. Volterra operators and semi-groups in weighted Banach spaces of analytic functions // *Collect. Math.* 2014. Vol. 65. P. 233–249.
3. Beltran-Menen M.G. Dynamics of weighted composition operators on weighted Banach spaces of entire functions // *J. Math. Anal. Appl.* 2020. Vol. 492, article 124422. P. 1–16.
4. Bonet J., Domański P., Lindström M., Taskinen J. Composition between weighted Banach spaces of holomorphic functions // *J. Austr. Math. Soc.* 1998. Vol. 64. P. 101–118.
5. Bonet J., Friz M., Jordá E. Composition operators between inductive limits of spaces of holomorphic functions // *Publ. Math.* 2005. Vol. 67, № 3–4. P. 333–348.
6. Bonet J., Taskinen J. A note about Volterra operators on weighted Banach spaces of entire functions // *Math. Nachr.* 2015. Vol. 288, № 11–12. P. 1216–1225.
7. Constantin O., Peláez J.A. Integral operators, embedding theorems and a Littlewood-Paley formula on weighted Fock spaces // *J. Geom. Anal. Soc.* 2016. Vol. 26, № 2. P. 1109–1154.
8. Cowen C., MacCluer B. *Composition operators on spaces of analytic functions.* Boca Raton: CRC Press, 1995. 388 p.
9. Mengestie T., Ueki S.-I. Integral, differential and multiplication operators on generalized Fock spaces // *Complex Anal. Oper. Theory.* 2019. Vol. 13, № 3. P. 935–953.
10. Pau J., Peláez J.A. Embedding theorems and integration operators on Bergman spaces with rapidly decreasing weights // *J. Funct. Anal.* 2010. Vol. 259. P. 2727–2756.
11. Tien P.T., Khoi L.N. Weighted composition operators between different Fock spaces // *Potential Anal.* 2019. Vol. 50. P. 171–195.
12. Zorboska N. Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // *Integr. Equ. Oper. Theory.* 2017. Vol. 87, № 4. P. 581–600.
13. Абанин А.В., Кораблина Ю.В. Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций // *Владикавказ. матем. журн.* 2019. № 3, т. 22. С. 5–17.
14. Zhu K. *Analysis on Fock spaces.* Graduate texts in Mathematics. New York: Springer, 2012. 346 p.

References

1. Abanin A.V., Tien P.T. Compactness of classical operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions. *Collect. Math.* 2018;69(1):1-15.
2. Basallote M., Contreras M.D., Hernández-Mancera C., Martin M.J., Paúl P.J. Volterra operators and semi-groups in weighted Banach spaces of analytic functions. *Collect. Math.* 2014;65:233-249.
3. Beltran-Menen M.G. Dynamics of weighted composition operators on weighted Banach spaces of entire functions. *J. Math. Anal. Appl.* 2020;492(124422):1-16.
4. Bonet J., Domański P., Lindström M., Taskinen J. Composition between weighted Banach spaces of holomorphic functions. *J. Austr. Math. Soc.* 1998;64:101-118.
5. Bonet J., Friz M., Jordá E. Composition operators between inductive limits of spaces of holomorphic functions. *Publ. Math.* 2005;67(3-4):333-348.
6. Bonet J., Taskinen J. A note about Volterra operators on weighted Banach spaces of entire functions. *Math. Nachr.* 2015;288(11-12):1216-1225.
7. Constantin O., Peláez J.A. Integral operators, embedding theorems and a Littlewood-Paley formula on weighted Fock spaces. *J. Geom. Anal. Soc.* 2016;26(2):1109-1154.
8. Cowen C., MacCluer B. *Composition operators on spaces of analytic functions.* Boca Raton: CRC Press; 1995. 388 p.
9. Mengestie T., Ueki S.-I. Integral, differential and multiplication operators on generalized Fock spaces. *Complex Anal. Oper. Theory.* 2019;13(3):935-953.
10. Pau J., Peláez J.A. Embedding theorems and integration operators on Bergman spaces with rapidly decreasing weights. *J. Funct. Anal.* 2010;259:2727-2756.
11. Tien P.T., Khoi L.N. Weighted composition operators between different Fock spaces. *Potential Anal.* 2019;50:171-195.
12. Zorboska N. Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory.* 2017;87(4):581-600.

13. Abanin A.V., Korablina Yu.V. Boundedness of classical operators in weighted spaces of holomorphic functions. *Vladikavk. matem. zhurn.* = *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2020;22(3):5-17. (In Russ.).

14. Zhu K. *Analysis on Fock spaces. Graduate texts in Mathematics*. New York: Springer Publ.; 2012. 346 p.

Информация об авторах

А.В. Абанин – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и геометрии, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет; заведующий отделом математического анализа, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН.

Ю.В. Кораблина – аспирант, кафедра математического анализа и геометрии, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет; младший научный сотрудник отдела математического анализа, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН.

Information about the authors

A.V. Abanin - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Mathematical Analysis Department, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University; Head of the Department of Mathematical Analysis, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences.

J.V. Korablina - Postgraduate Student, Department of Mathematical Analysis, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University; Junior Researcher, Department of Mathematical Analysis, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences.

Статья поступила в редакцию 07.07.2022; одобрена после рецензирования 20.07.2022; принята к публикации 15.11.2022. The article was submitted 07.07.2022; approved after reviewing 20.07.2022; accepted for publication 15.11.2022.

Научная статья
УДК 517.983.22
doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-90-95

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА КОНУСАХ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Алексей Константинович Дронов^{1✉}, *Виталий Маркович Каплицкий*²

^{1, 2} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

¹ floberr@mail.ru ✉

² kaplitsky@donpac.ru

Аннотация. Рассмотрен общий подход к решению вопроса о существовании базиса в произвольном дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте с правильным базисом. Данный подход основан на использовании интерполяционных свойств положительных операторов, действующих в пространствах числовых последовательностей и ограниченных на некоторых вложенных в них конусах.

Ключевые слова: базис, ядерные пространства Кёте, правильный базис, дополняемое подпространство

Для цитирования: Дронов А.К., Каплицкий В.М. Интерполяционные свойства положительных операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей, и их применение к теории базисов в пространствах Фреше // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 90–95.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

INTERPOLATION PROPERTIES OF POSITIVE OPERATORS BOUNDED ON CONES IN BANACH SPACES OF NUMERICAL SEQUENCES AND THEIR APPLICATION TO THE THEORY OF BASES IN FRÉCHET SPACES

Aleksei K. Dronov^{1✉}, *Vitalii M. Kaplitskii*²

^{1, 2} Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

¹ floberr@mail.ru ✉

² kaplitsky@donpac.ru

Abstract. An approach is presented for solving the problem of the existence of a basis in an arbitrary complemented subspace of the nuclear Köthe space with a regular basis. This approach is based on the use of interpolation properties of positive operators acting in sequence spaces and bounded on some cones embedded in them.

Keywords: basis, Köthe nuclear space, regular basis, complemented subspace

For citation: Dronov A.K., Kaplitskii V.M. Interpolation Properties of Positive Operators Bounded on Cones in Banach Spaces of Numerical Sequences and Their Application to the Theory of Bases in Fréchet Spaces. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):90-95. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

© Дронов А.К., Каплицкий В.М., 2022

Введение

В работе [1] М.М. Драгилев ввёл понятие правильного базиса, которое оказалось очень удобным для применения к различным трудным проблемам теории базисов техники теории интерполяции линейных операторов. Именно наличие правильного базиса в пространстве Кёте обеспечивает хорошие интерполяционные свойства соответствующей шкалы ассоциированных банаховых пространств числовых последовательностей. На первом этапе исследований в этой области применялись классические теоремы об интерполяции линейных операторов, заданных на всём пространстве [2–4]. Однако в проблеме существования базиса в дополняемом подпространстве (проблема А. Пелчинского) возникла необходимость получения аналогичных интерполяционных оценок норм для операторов, ограниченных лишь на некоторых конусах в пространствах числовых последовательностей. В некоторых частных случаях задачу интерполяции операторов, ограниченных на конусах в пространствах числовых последовательностей, удалось решить [2, 3] и в качестве следствия доказать существование базиса в произвольном дополняемом подпространстве ядерного пространства, принадлежащего одному из классов М.М. Драгилева ((d_1) или (d_2)). Основным результатом данной статьи является изложение общего метода редукции проблемы существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте, обладающего правильным (в смысле М.М. Драгилева) базисом, к задаче получения некоторых интерполяционных оценок норм положительных операторов на конусах со свойством нижней полурешётки в пространствах числовых последовательностей. Сформулирована общая интерполяционная теорема об интерполяции положительных операторов на конусах со свойством нижней полурешётки в пространствах числовых последовательностей с \sup -нормой, которая может быть эффективно использована в теории базисов. Доказательство этой теоремы мы планируем привести отдельно.

В данной статье будут использованы следующие обозначения: ω – линейное пространство всех числовых последовательностей; φ – линейное пространство всех финитных числовых последовательностей; c_0 – линейное пространство всех сходящихся к нулю числовых последовательностей; E^+ – конус неотрицательных векторов пространства числовых последовательностей E , т.е. множество последовательностей из E , каждый элемент которых неотрицателен; E^{++} – конус положительных векторов пространства числовых последовательностей E ; $c_0(a_r)$ – банахово пространство числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом $a_r = \{a_r(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \omega^+$, определяемое нормой $\|x\|_{c_0(a_r)} = \|x\|_r = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)| a_r(n)$, т.е. линейное пространство числовых последовательностей $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $|x| < \infty$, с топологией, порождаемой нормой $\|\cdot\|_r$; $l_2(a_r)$, $a_r \in \omega^+$, – гильбертово пространство числовых последовательностей, определяемое гильбертовой нормой $\|x\|_{l_2(a_r)} = \|x\|_r = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x(n)|^2 a_r^2(n)}$.

Для $a, b \in \omega$ через ab обозначается последовательность $\{a(n)b(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Для банаховых пространств E и F под записью $E \subset F$ всюду ниже будет подразумеваться, что E алгебраически и топологически вложено в F .

Интерполяционные свойства операторов, ограниченных на конусах в пространствах числовых последовательностей

Подмножество Q линейного пространства E называется конусом, если для любых $x, y \in Q$, $\lambda \geq 0$ имеем $x + y \in Q$, $\lambda x \in Q$. Конус Q в линейном пространстве E называется воспроизводящим, если его линейная оболочка \bar{Q} совпадает с E . Несложно видеть, что Q является воспроизводящим тогда и только тогда, когда для любого $x \in E$ найдутся $y, z \in Q$ такие, что $x = y - z$. Конус Q в линейном топологическом пространстве E называется тотальным, если замыкание его линейной оболочки \bar{Q} совпадает с E . Конус Q в нормированном пространстве E называется несплюснутым, если существует константа $c > 0$ такая, что для любого $x \in \text{span}(Q)$ найдутся $y, z \in Q$: $x = y - z$, $\|y\| \leq c\|x\|$, $\|z\| \leq c\|x\|$. Наименьшая из таких констант называется константой несплюснутости конуса Q и обозначается $\lambda(Q)$. Пусть E, F – нормированные пространства и $T: E \rightarrow F$ – линейный оператор, ограниченный на элементах несплюснутого конуса $Q \subset E$: $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, x \in Q$.

Несложно видеть, что такой оператор T ограничен на подпространстве \bar{Q} , однако в приведенном выше неравенстве константа C умножается на константу несплюснутости конуса. Если условие несплюснутости конуса не выполнено, то из ограниченности оператора на конусе не следует ограниченность этого оператора на линейной оболочке конуса. Поэтому получать интерполяционные оценки норм операторов на конусах с помощью обычной линейной интерполяции не получается. В задачах интерполяции операторов на конусах в общем случае появляются значительные трудности. Заметим, что линейный оператор, ограниченный на элементах замкнутого воспроизводящего конуса банахова пространства, является ограниченным во всем пространстве. Будем рассматривать векторные решетки [5] числовых последовательностей, в которых упорядоченность вводится стандартным образом ($x \geq y$, где $x, y \in \omega$, если $x(n) \geq y(n)$ для всех n). Для любой последовательности $y \in \omega$ справедливо разложение $y = y_+ - y_-$, где y_+, y_- – последовательности, определяющиеся следующим образом: $y_+ = \max(y(n), 0)$, $y_- = \min(y(n), 0)$.

Элемент $|y| = y_+ - y_-$ называется модулем. В нормированном пространстве E числовых последовательностей норма $\|\cdot\|$ называется монотонной, если для всех $x, y \in E$ из неравенства $|x| \leq |y|$ следует неравенство $\|x\| \leq \|y\|$. Подмножество A упорядоченного пространства E называется нижней полурешеткой, если для любых $x, y \in A$ справедливо $\min(x, y) \in A$. Ниже будем использовать понятия, определения которых можно найти, например, в [6]. Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} – отделимые вещественные линейные топологические пространства, являющиеся векторными решетками. Пусть $\bar{E} = (E_0, E_1)$; $\bar{F} = (F_0, F_1)$ – банаховы пары; $E_i \subset \mathcal{A}, F_i \subset \mathcal{B}$ и Q_i – конусы в пространствах E_i ($i = 0, 1$), причем пространства E и F наследуют полупорядок от \mathcal{A} и \mathcal{B} таким образом, что сами становятся векторными решетками. Будем говорить, что $\bar{Q} = (Q_0, Q_1)$ – пара конусов в банаховой паре \bar{E} . Конус Q в пространстве \mathcal{A} называется промежуточным для пары \bar{Q} , если $Q_0 \cap Q_1 \subset Q \subset Q_0 + Q_1$.

Пусть банаховы пространства E и F являются промежуточными пространствами банаховых пар \bar{E} и \bar{F} , причем банахова тройка (E_0, E_1, E) интерполяционна относительно банаховой тройки (F_0, F_1, F) [6, гл. 3, с. 32–34]; $T: E_0 + E_1 \rightarrow F_0 + F_1$ – непрерывный линейный оператор. Если T – положительный линейный оператор, действующий из E_i в F_i так, что $T_{Q_i}|_{Q_i}: Q_i \rightarrow F_i$ ($i = 0, 1$) и $\|Tx\|_{F_i} \leq M_i \|x\|_{E_i}$ при $x \in Q_i$, то будем говорить, что T – положительный ограниченный оператор из пары нормированных конусов $\bar{Q} = (Q_0, Q_1)$ в банахову пару $\bar{F} = (F_0, F_1)$. Обозначим через $L^+(Q_0, Q_1)$ множество таких операторов. Пусть конус $Q \subset E$ является промежуточным для пары \bar{Q} . Если существует постоянная $c = c(\bar{E}, \bar{F}, \bar{Q}, E, F, Q) > 0$ такая, что $T_Q|_Q: Q \rightarrow F$ и

$$\|Tx\|_F \leq c \cdot \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E, \quad x \in Q, \quad (1)$$

для всех $T \in L^+(Q_0, Q_1)$, то будем говорить, что тройка конусов (Q_0, Q_1, Q) обладает P -интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F) и равномерным P -интерполяционным, если в неравенстве (1) постоянная $c = c(\bar{E}, \bar{F}, E, F)$ не зависит от конуса Q .

Сформулируем интерполяционную теорему, пользуясь которой, как будет показано ниже, можно доказать существование базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте с правильным базисом.

Теорема. Пусть $E_i = c_0(a_i)$; $F = c_0(b_i)$ ($i = 0, 1$); $E = c_0(a)$; $F = c_0(b)$, причем $E_1 \subset E \subset E_0$, $F_1 \subset F \subset F_0$ и банахова тройка (E_0, E_1, E) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F) . Пусть \mathcal{A} – множество конусов в ω^+ такое, что для каждого $Q \in \mathcal{A}$ выполняются условия:

- 1) Q – нижняя полурешетка в ω ;
- 2) $Q \cap E_1^+$ – тотальный конус в E_1 ;
- 3) $Q \cap E_1^+$ содержит последовательность, все члены которой положительны.

Тогда семейство троек конусов $\mathcal{L} = \{(Q \cap E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+): Q \in \mathcal{A}\}$ обладает равномерным P -интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$.

Доказательство этой теоремы предполагается опубликовать в отдельной статье. Заметим, что общее определение интерполяционности семейств (для случая пространств Фреше) вводится в [7].

Редукция проблемы существования базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте к задаче интерполяции положительного оператора, ограниченного на конусах в пространствах числовых последовательностей

Последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов локально выпуклого пространства X называется базисом, если для любого элемента $x \in X$ найдется единственная числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что ряд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad (2)$$

сходится в X .

Правую часть в (2) можно также записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x) e_n$, где $e'_n(x) = c_n$ – коэффициентные функционалы. Если для всех $x \in X$ выполняется $\sum_{n=1}^{\infty} |e'_n(x)| \|e_n\|_r < \infty$ для любой непрерывной преднормы $\|\cdot\|_r$, то базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется абсолютным. Пространством Фреше называется полное метризуемое локально выпуклое пространство. Топология всякого пространства Фреше может быть задана с помощью счетной системы преднорм $\{\|\cdot\|_r\}_{r=1}^{\infty}$, $r=1,2,\dots$. Системы преднорм $\{\|\cdot\|_r\}_{r=1}^{\infty}$ и $\{\|\cdot\|_{r'}\}_{r'=1}^{\infty}$ пространства Фреше называются эквивалентными, если они порождают на нем одинаковую топологию.

Пусть X – пространство Фреше с определяющей системой преднорм $\{\|\cdot\|_r\}_{r=1}^{\infty}$, $r=1,2,\dots$. Всегда можно считать, что система $\{\|\cdot\|_r\}_{r=1}^{\infty}$, $r=1,2,\dots$, является возрастающей, т.е. $\|x\|_r, \|x\|_{r+1}$ для всех $x \in X$ (в противном случае переходят к эквивалентной системе преднорм). Базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства Фреше X называется правильным, если имеется определяющая система преднорм $\{\|\cdot\|_r\}_{r=1}^{\infty}$, $r=1,2,\dots$, такая, что $\frac{\|e_{n+1}\|_r}{\|e_{n+1}\|_{r+1}} \leq \frac{\|e_n\|_r}{\|e_n\|_{r+1}}$ для всех n и r .

Для нас основной интерес представляют ядерные пространства Фреше с правильным базисом. Такие пространства изоморфны ядерным пространствам Кёте с правильной матрицей. Дадим определение пространства Кёте.

Пусть $(a_r(n)), r, n \in \mathbb{N}$, – бесконечная матрица, при этом $a_{r+1}(n) \geq a_r(n) > 0$ для всех n . Пространством Кёте E будем называть пространство числовых последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\|x\|_r = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| a_r(n) < \infty$ с определяющей системой преднорм $(\|\cdot\|_r), r \in \mathbb{N}$.

В пространстве Кёте имеется абсолютный базис ортов, состоящий из последовательностей вида $e_n = \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\delta_{kn} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n. \end{cases}$

Базис ортов в пространстве Кёте называют каноническим. Матрица Кёте $(a_r(n))$ называется правильной, если $\frac{a_r(n+1)}{a_{r+1}(n+1)} \leq \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)}$ для всех n и r .

Всякое пространство Фреше с абсолютным базисом изоморфно некоторому пространству Кёте [8, гл. 27, р. 341]. Несложно видеть, что пространство Фреше с правильным абсолютным базисом изоморфно пространству Кёте с правильной матрицей. Пространство Кёте, определяемое матрицей Кёте $(a_r(n))$, является ядерным тогда и только тогда, когда для любого r найдется $q \leq r$ такой, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_q(n)} < \infty$.

Доказательство можно найти, например, в [8, гл. 28, р. 355; 9]. Переходя в случае необходимости к эквивалентной системе преднорм, всегда можем считать, что $q = r + 1$. Пусть банахово пространство E с базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ компактно вложено в пространство Фреше F и всюду плотно в нем. Если в F равномерно непрерывна система операторов $P_n x = \sum_{i=1}^n e'_i(x) e_i$, то система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является базисом в F . В дальнейшем будет использован критерий существования базиса в пространствах Фреше, доказательство которого в более общей формулировке можно найти в [4]. Пусть банахово пространство G с базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ компактно вложено в пространство Фреше F и всюду плотно в нем. Если в F равномерно непрерывно семейство операторов $\{P_n\}: F \rightarrow F, n \in \mathbb{N}, P_n x = \sum_{i=1}^n e'_i(x) e_i$, то система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ является базисом в F .

Пусть пространство Фреше F является дополняемым подпространством некоторого другого пространства Фреше E , т.е. $F = P(E)$ для некоторого непрерывного проектора P в E . Тогда для доказательства существования базиса в F достаточно убедиться в равномерной непрерывности семейства операторов $\{P_n\}: E \rightarrow E, n \in \mathbb{N}, P_n x = \sum_{i=1}^n e'_i(x) e_i$.

Итак, пусть E – ядерное пространство Кёте, определяемое правильной матрицей $(\mathbf{a}_r(n))$, F – его дополняемое подпространство. Задача состоит в том, чтобы доказать существование базиса в F . Без ограничения общности можно считать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_r(n)}{\mathbf{a}_{r+1}(n)} < \infty, r = 1, 2, \dots$

Введем обозначения: $H_r = l_2(\mathbf{a}_r(n)); G_r = c_0(\mathbf{a}_r(n)), r \in \mathbb{N}$. Тогда $E = \bigcap_{r \geq 1} H_r = \bigcap_{r \geq 1} G_r$, причем $G_1 \supset G_r \supset G_{r+1}, H_1 \supset H_r \supset H_{r+1}$. Из условия ядерности следует, что системы l_2 -норм и соответствующие системы sup -норм являются эквивалентными [8, гл. 28, р. 355], причем справедливы оценки: $|x|_r \leq \|x\|_r \leq D(r)|x|_{r+1}, \|x\|_r = \|x\|_{l_2(\mathbf{a}_r)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \mathbf{a}_r^2(n)}, |x|_r = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \mathbf{a}_r(n)$.

С помощью диагонального преобразования можно перейти к изоморфному пространству Кёте, в котором $\mathbf{a}_1(n) \equiv 1$. В дальнейшем будем предполагать, что это условие выполнено. Пусть P – непрерывный проектор в E , такой, что $F = P(E)$. Так как E – пространство с абсолютным базисом (из ядерности E и теоремы Дынина – Митягина [9, гл. 10] следует, что всякий базис в E абсолютен), то оператор $|P|: E \rightarrow E$ также непрерывен. Здесь $|P|$ – модуль оператора P в смысле теории векторных решеток [5, гл. 8, с. 231]. Если (p_{ij}) – матрица P в каноническом базисе ортов $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, то $(|p_{ij}|)$ – матрица $|P|$ в этом же базисе. Запишем условие непрерывности оператора $|P|: \forall r \exists s(r), C'(r): \||P|\|_r \leq C'(r)|x|_{s(r)}$.

Переходя, в случае необходимости, к эквивалентной системе норм, можно добиться выполнения неравенств $\||P|\|_r \leq \frac{1}{2}|x|_{r+1}, r = 1, 2, \dots$

Пополнив линейное многообразие $L = \{Px: x \in G_{\infty,0}\}$ по нормам $\|\cdot\|_r$ и $\|\cdot\|_{\infty}$, получим гильбертовы пространства F_r и F_{∞} такие, что $F_1 \supset F_r \supset F_{r+1} \supset F_{\infty}$.

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – общий (см. подробнее в [10]) ортогональный базис пространств F_1 и F_{∞} . Для определенности будем считать его нормированным в F_1 .

Введем операторы $P_n: E \rightarrow E, n \in \mathbb{N}, P_n x = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(Px) f_k$, где $f'_k(Px) = (f_k, Px)_{H_1}$. Согласно приведенному выше критерию, последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом в F , если $\{P_n\}$ – равностепенно непрерывное семейство операторов E . Действуя так же, как в [11], можно ввести пространства $G_{\infty,0} = c_0(a_{\infty,0}), H_{\infty} = l_2(a_{\infty}), G_{\infty} = c_0(a_{\infty})$ таким образом, что вложения $G_{\infty,0} \subset H_{\infty} \subset G_{\infty} \subset H_r \subset G_r$ непрерывны для всех r и выполняются неравенства

$$\||P|\|_1 \leq C_1(r) |A_r^1 x|_1, x \in Q_{N_1} \cap G_1^+, \quad (3)$$

$$\||P|\|_{\infty} \leq C_1(r) |A_r^1 x|_{\infty}, x \in Q_{N_2} \cap G_{\infty}^+, \quad (4)$$

где A_r^1 и A_r^2 – композиции оператора $|P|$ и специальным образом построенных диагональных операторов. Фигурирующие в неравенствах конусы Q_{N_1} и Q_{N_2} определяются следующим образом: $Q_{N_i} = \{x \in \omega^+: x \geq A_r^i x\}, i = 0, 1$.

Опираясь на представленную выше интерполяционную теорему и свойства конусов Q_{N_1} и Q_{N_2} , можно доказать, что из неравенств (3) и (4) следует $\||P|\|_r \leq C(r)|x|_r, x \in F$, что и доказывает существование базиса в F .

Список источников

1. Драгилев М.М. О правильных базисах в ядерных пространствах // Мат. сб. 1965. Т. 68, № 2. С. 153–173.
2. Драгилев М.М. Базисы в пространствах Кёте. Ростов н/Д.: РГУ, 2003. 143 с.
3. Кондаков В.П., Ефимов А.И. О базисах в дополняемых подпространствах пространств, обобщающих пространства степенных рядов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2001. № 1. С. 5–9.
4. Кондаков В.П. Замечание о существовании базисов в весовых счётно-гильбертовых пространствах и их дополняемых подпространствах // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 43, № 6. С. 1300–1313.
5. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 407 с.
6. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
7. Шубарин М.А. Условия интерполяционности для семейств пространств Фреше // Владикавказский мат. журн. 2007. Т. 9, вып. 2. С. 57–65.

8. Meise R., Vogt D. Introduction to functional analysis. Oxford: Clarendon, 2004.
9. Митягин Б.С. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук. 1961. Т. XVI, вып. 4. С. 63–132.
10. Дронов А.К., Каплицкий В.М. О существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_1) // Мат. сб. 2018. Т. 209, вып. 10. С. 50–70.
11. Дронов А.К. О существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2) // Владикавказский мат. журн. 2016. Т. 18, вып. 1. С. 9–10.

References

1. Dragilev M.M. On correct bases in nuclear spaces. *Mat. sb. = Sbornik: Mathematics*. 1965;68(2):153-173. (In Russ.).
2. Dragilev M.M. *Bases in Kete spaces*. Rostov-on-Don: Rostov State University Press; 2003. 143 p. (In Russ.).
3. Kondakov V.P., Efimov A.I. On bases in augmented subspaces of spaces generalizing spaces of power series. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2001;(1):5-9. (In Russ.).
4. Kondakov V.P. Remark on the existence of bases in weighted countable Hilbert spaces and their augmented subspaces. *Sib. mat. zhurn. = Siberian Mathematical Journal*. 2001;43(6):1300-1313. (In Russ.).
5. Vulikh B.Z. *Introduction to the theory of semi-ordered spaces*. Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature; 1961. 407 p. (In Russ.).
6. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolation of linear operators*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. 400 p. (In Russ.).
7. Shubarin M.A. Interpolation conditions for families of Frechet spaces. *Vladikavk. matem. zhurn. = Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2007;9(2):57-65. (In Russ.).
8. Meise R., Vogt D. *Introduction to functional analysis*. Oxford: Clarendon; 2004.
9. Mityagin B.S. Approximative dimension and bases in nuclear spaces. *Uspekhi mat. nauk = Russian Mathematical Surveys*. 1961;XVI(4):63-132. (In Russ.).
10. Dronov A.K., Kaplitsky V.M. On the existence of a basis in the augmented subspace of the Kete nuclear space from class (d_1) . *Mat. sb. = Sbornik: Mathematics*. 2018;209(10):50-70. (In Russ.).
11. Dronov A.K. On the existence of a basis in the augmented subspace of the Kete nuclear space from class (d_2) . *Vladikavk. matem. zhurn. = Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2016;18(1):9-10. (In Russ.).

Информация об авторах

А.К. Дронов – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

В.М. Каплицкий – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the authors

A.K. Dronov – Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

V.M. Kaplitskii – Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Differential and Integral Equations, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 07.07.2022; одобрена после рецензирования 20.07.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 07.07.2022; approved after reviewing 20.07.2022; accepted for publication 15.11.2022.

Научная статья

УДК 517.982.3+517.983.22

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-96-101

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДЮАМЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Павел Александрович Иванов

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
piv@sfedu.ru

Аннотация. Пусть Ω – полиобласть в C^N , содержащая точку 0; $H(\Omega)$ – пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах Ω . В топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$ введено и исследовано умножение \otimes . Оно определяется по правилу свертки с помощью сдвигов, ассоциированных с системой операторов частного обратного сдвига. С операцией \otimes пространство $H(\Omega)'$ является унитарной ассоциативной и коммутативной алгеброй. Получены реализации алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ с помощью преобразований Коши и Лапласа и ее представление в $H(\Omega)$. Посредством преобразования Лапласа введенное умножение \otimes реализовано как многомерное произведение Дюамеля в соответствующем пространстве целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: пространство голоморфных функций, алгебра, оператор обратного сдвига, произведение Дюамеля

Для цитирования: Иванов П.А. Произведение Дюамеля в пространствах целых функций экспоненциального типа // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 96–101.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

THE DUHAMEL PRODUCT IN SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE

Pavel A. Ivanov

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
piv@sfedu.ru

Abstract. Let Ω be a polydomain in C^N containing the point 0; $H(\Omega)$ be the space of all holomorphic functions on Ω with the compact open topology. In the dual $H(\Omega)'$ of $H(\Omega)$ a multiplication \otimes is introduced and investigated. It is defined by the convolution rule with the help of shifts which are associated with the system of partial backward shift operators. The realizations of the algebra $(H(\Omega)', \otimes)$ with the help of the Cauchy and the Laplace transformations and its representation in $H(\Omega)$ are obtained. By means of the Laplace transformation the introduced multiplication \otimes is realized as the many-dimensional Duhamel product in the appropriate space of entire functions of exponential type.

Keywords: space of holomorphic functions, algebra, backward shift operator, Duhamel product

For citation: Ivanov P.V. The Duhamel Product in Spaces of Entire Functions of Exponential Type. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):96-101. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

© Иванов П.А., 2022

Введение

В настоящей работе исследуются проблемы, связанные с системой операторов частного обратного сдвига в пространстве Фреше $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в полиобласти Ω в \mathbb{C}^N , содержащей точку 0. Эти операторы для $N \geq 2$ введены в статье [1]. Основное внимание уделено умножению \odot в топологическом сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$, задаваемому по правилу свертки с помощью ассоциированных операторов сдвига. Показано, что алгебра $(H(\Omega)', \odot)$ является топологической, если $H(\Omega)'$ наделять сильной топологией. Следуя [2], изучаем реализации алгебры $(H(\Omega)', \odot)$ с помощью преобразований Коши и Лапласа. Первое реализует ее как поточечное умножение (с дополнительным множителем $\xi_1 \dots \xi_N$, где ξ_j – независимые переменные), что влечет ассоциативность и коммутативность алгебры $(H(\Omega)', \odot)$. Второе является изоморфизмом $(H(\Omega)', \odot)$ на некоторую алгебру целых функций экспоненциального типа, умножением в которой является произведение Дюамеля. В одномерной ситуации в пространствах голоморфных функций произведение Дюамеля введено и изучено в [3]. В многомерной ситуации (в пространстве Харди $H^p(\Delta)$, $0 < p < \infty$, на открытом единичном поликруге Δ) оно определено в [4]. Алгебры с произведением Дюамеля довольно интенсивно исследуются в последнее время и имеют достаточно много приложений (см., например, статью [5]). Полученное ранее в [1] описание коммутанта $\mathcal{K}(D_0)$ системы операторов частного обратного сдвига в алгебре всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов позволило построить естественное представление $(H(\Omega)', \odot)$ в $H(\Omega)$.

Предварительные сведения

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$, положим $P_N := \{1, \dots, N\}$. Пусть Ω_j , $j \in P_N$, – односвязные области в \mathbb{C} , содержащие точку 0; $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N$. Через $H(\Omega)$ обозначим пространство всех функций, голоморфных в Ω , с топологией равномерной сходимости на компактах Ω .

Для $t, z \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subseteq P_N$ определим точку $t_{\sigma, z} \in \mathbb{C}^N$: $(t_{\sigma, z})_k := \begin{cases} t_k, & k \notin \sigma, \\ z_k, & k \in \sigma. \end{cases}$

Если $\sigma = \{j\}$, то $t_{j, z} := t_{\sigma, z}$. Для $j \in P_N$ оператор частного обратного сдвига $D_{j,0}$ определяется равенством $D_{j,0}(f)(t) := \frac{f(t) - f(t_{j,0})}{t_j}$, $f \in H(\Omega)$.

Согласно [1, лемма 2.1], $D_{j,0}$ линейен и непрерывен в $H(\Omega)$. С системой $\{D_{j,0} : j \in P_N\}$, следуя [6], ассоциируем операторы сдвига $T_{j,z}(f)(t) := \frac{t_j f(t) - z_j f(t_{j,z})}{t_j - z_j}$, $z \in \mathbb{C}^N$, $j \in P_N$, $f \in H(\Omega)$, которые линейны и непрерывны в $H(\Omega)$ [1, определение 2.2]. Полагаем $T_z := T_{1,z} \dots T_{N,z}$, $z \in \mathbb{C}^N$.

Отметим полезное свойство операторов T_z .

Лемма 1 [1, лемма 2.4]. Для функции $f \in H(\Omega)$, точек $t, z \in \Omega$ таких, что $t_j \neq z_j$, $j \in P_N$, выполняется равенство $T_z(f)(t) = \frac{1}{(t-z)^1} \sum_{\sigma \subseteq P_N} (-1)^{|\sigma|} t_{\sigma, z}^1 f(t_{\sigma, z})$.

При этом $z^1 := \prod_{j=1}^N z_j$, $z \in \mathbb{C}^N$. Для $\sigma \subseteq P_N$ символ $|\sigma|$ обозначает число элементов множества σ . Считаем, что $|\emptyset| = 0$.

Умножение \odot в $H(\Omega)'$

Символ $H(\Omega)'$ обозначает топологическое сопряженное к $H(\Omega)$ пространство; $H(\Omega)'_b$ – сильное сопряженное к $H(\Omega)$. Следуя [2, §1], введем бинарную операцию \odot : для $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$

$$(\varphi \odot \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))), f \in H(\Omega). \quad (1)$$

Нижний индекс у функционала показывает, по каким переменным он действует.

Докажем, что \odot является умножением в $H(\Omega)'$, и с этим умножением $H(\Omega)'$ – унитарная топологическая алгебра. Предварительно выберем последовательности односвязных областей $Q_{j,n}$, $n \in \mathbb{N}$, в Ω_j таких, что их замыкания $\overline{Q_{j,n}}$ в \mathbb{C} – компакты в Ω_j , их границы $\partial Q_{j,n}$ – спрямляемые жордановы кривые и $0 \in Q_{j,1}$, $Q_{j,n} \subseteq \text{int} Q_{j,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_j = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_{j,n}$, $j \in P_N$.

Символ $\text{int}Q$ обозначает внутренность множества $Q \subseteq \mathbb{C}$ в \mathbb{C} . Положим $Q_n := Q_{1,n} \times \dots \times Q_{N,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность норм $\|f\|_n := \max_{z \in Q_n} |f(z)|$, $f \in H(\Omega)$, задает топологию $H(\Omega)$. При этом $\overline{Q_n}$ – замыкание Q_n в \mathbb{C}^N . Пусть $\|\varphi\|_n^* := \sup_{\|f\|_n \leq 1} |\varphi(f)|$, $\varphi \in H(\Omega)'$ (величина $\|\varphi\|_n^*$ может равняться и $+\infty$).

Определим пространства $H_n(\Omega)' := \{\varphi \in H(\Omega)': \|\varphi\|_n^* < +\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$. Выполняется равенство $H(\Omega)' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n(\Omega)'$. Поскольку $H(\Omega)$ рефлексивно, то из [7, предложение 8.4.18] $H(\Omega)'_b$ является индуктивным пределом последовательности банаховых пространств $(H_n(\Omega)', \|\cdot\|_n^*)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $H(\Omega)'$. Отсюда следует, что топологическое произведение $H(\Omega)'_b \times H(\Omega)'_b$ является индуктивным пределом последовательности топологических произведений $(H_n(\Omega)', \|\cdot\|_n^*) \times (H_n(\Omega)', \|\cdot\|_n^*)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений вложения.

Далее $\Gamma_n := \partial Q_{1,n} \times \dots \times \partial Q_{N,n}$, $n \in \mathbb{N}$, – остов полиобласти Q_n . Вследствие принципа максимума модуля голоморфной (в области \mathbb{C}) функции выполняется равенство $\|f\|_n = \max_{z \in \Gamma_n} |f(z)|$, $f \in H(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ [8, гл. 1, § 3].

Теорема 1. (i) \otimes – бинарная операция в $H(\Omega)'$.

(ii) $H(\Omega)'_b$ с умножением \otimes – унитарная топологическая алгебра.

Доказательство. (i) Из [1, лемма 2.3 (iv)] для $f \in H(\Omega)$ функция $z \mapsto \psi(T_z(f))$ голоморфна в Ω . Значит, выражение $(\varphi \otimes \psi)(f)$ в (1) определено для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$. Покажем, что линейный на $H(\Omega)$ функционал $\varphi \otimes \psi$ непрерывен. Существуют $k \in \mathbb{N}$ и $m > k$ такие, что $\|\varphi\|_k^* < +\infty$, $\|\psi\|_m^* < +\infty$ и

$$|\varphi_z(\psi(T_z(f)))| \leq \|\varphi\|_k^* \cdot \max_{z \in \Gamma_k} |\psi(T_z(f))| \leq \|\varphi\|_k^* \cdot \|\psi\|_m^* \sup_{z \in \Gamma_k} \sup_{t \in \Gamma_m} |T_z(f)(t)|. \quad (2)$$

Отметим, что для любых $z \in \Gamma_k$, $t \in \Gamma_m$, $\sigma \subseteq P_N$ точка $t_{\sigma,z}$ принадлежит $\overline{Q_m}$. Поэтому равенство в лемме 1 влечет существование постоянной $C > 0$, для которой

$$\sup_{z \in \Gamma_k} \sup_{t \in \Gamma_m} |T_z(f)(t)| \leq C \|f\|_m, \quad (3)$$

где $f \in H(\Omega)$.

Из неравенств (2) и (3) следует, что $|(\varphi \otimes \psi)(f)| \leq \|\varphi\|_k^* \|\psi\|_m^* C \|f\|_m$, $f \in H(\Omega)$. Значит, $\varphi \otimes \psi \in H(\Omega)'$.

(ii) Как и при доказательстве утверждения (i), получим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C_n > 0$ такая, что $|(\varphi \otimes \psi)(f)| \leq C_n \|\varphi\|_n^* \|\psi\|_n^* \|f\|_n$, $\varphi, \psi \in H_n(\Omega)'$, $f \in H(\Omega)$. Отсюда следует, что $\|\varphi \otimes \psi\|_n^* \leq C_n \|\varphi\|_n^* \|\psi\|_n^*$, $\varphi, \psi \in H_n(\Omega)'$.

Последнее неравенство показывает, что отображение $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ непрерывно из $H(\Omega)'_b \times H(\Omega)'_b$ в $H(\Omega)'_b$. Значит, $(H(\Omega)'_b, \otimes)$ – топологическая алгебра. Единицей в ней является дельта-функция $\delta_0(f) := f(0)$.

Реализации алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$

Реализация \otimes посредством преобразования Коши. Положим $C\Omega := (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_1) \times \dots \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_N)$, где $\overline{\mathbb{C}}$ – расширенная комплексная плоскость. Пусть $H_0(C\Omega)$ – пространство всех функций, голоморфных на $C\Omega$, т.е. голоморфных в некоторой открытой окрестности $C\Omega$ в $\overline{\mathbb{C}}^N$ и равных нулю на $\overline{\mathbb{C}}^N \setminus C\Omega$. Введем функции $f_\xi(z) := \frac{1}{(\xi-z)^1}$. Преобразование Коши задается равенством $\mathcal{K}(\varphi)(\xi) := \varphi(f_\xi)$, $\varphi \in H(\Omega)'$, $\xi \in (C\Omega) \cap \mathbb{C}^N$.

Согласно [9, лемма 12.5], \mathcal{K} – линейный изоморфизм $H(\Omega)'$ на $H_0(C\Omega)$.

Теорема 2. Для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$ выполняется равенство

$$\mathcal{K}(\varphi \otimes \psi)(\xi) = \xi^1 \mathcal{K}(\varphi)(\xi) \mathcal{K}(\psi)(\xi), \quad \xi \in (C\Omega) \cap \mathbb{C}^N.$$

Доказательство. По [1, лемма 2.3 (iii)] $T_z(f_\xi) = \frac{\xi^1}{(\xi-z)^1} f_\xi$, $\xi \in (C\Omega) \cap \mathbb{C}^N$, $z \in \Omega$. Поэтому для $\xi \in (C\Omega) \cap \mathbb{C}^N$

$$\mathcal{K}(\varphi \otimes \psi)(\xi) = (\varphi \otimes \psi)(f_\xi) = \varphi_z(\psi(T_z(f_\xi))) = \varphi_z\left(\psi\left(\frac{\xi^1}{(\xi-z)^1} f_\xi\right)\right) = \xi^1 \mathcal{K}(\varphi)(\xi) \cdot \mathcal{K}(\psi)(\xi).$$

Следствие 1. Алгебра $(H(\Omega)', \otimes)$ ассоциативна и коммутативна.

Реализация \otimes посредством преобразования Лапласа. Рассмотрим случай преобразования Лапласа. Положим $e_\lambda(z) := e^{\langle \lambda, z \rangle}$, $\langle \lambda, z \rangle = \sum_{j=1}^N \lambda_j z_j$, $\lambda, z \in \mathbb{C}^N$.

Для $\varphi \in H(\Omega)'$ определим $\mathfrak{F}(\varphi)(\lambda) := \widehat{\varphi}(\lambda) := \varphi(e_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^N$.

Пусть $P_\Omega := \mathfrak{F}(H(\Omega)')$. Преобразование Лапласа $\mathfrak{F}: H(\Omega)' \rightarrow P_\Omega$ – линейный изоморфизм «на» [10, §1]. В P_Ω введем локальную выпуклую топологию так, что $\mathfrak{F}: H(\Omega)' \rightarrow P_\Omega$ является и топологическим изоморфизмом.

Определим функционалы δ_λ , $\lambda \in \Omega$: $\delta_\lambda(f) := f(\lambda)$, $f \in H(\Omega)$. Все они линейны и непрерывны на $H(\Omega)$. Отметим, что $\widehat{\delta_\lambda} = e_\lambda$, $\lambda \in \Omega$. Определим произведение Дюамеля $*$: для $g, h \in H(\mathbb{C}^N)$, $t \in \mathbb{C}^N$ $(g * h)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_N} g(t - \xi) h(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_N$.

Ясно, что $g * h \in H(\mathbb{C}^N)$ для любых функций $g, h \in H(\mathbb{C}^N)$. Кроме того, отображение $(g, h) \mapsto g * h$ непрерывно из топологического произведения $H(\mathbb{C}^N) \times H(\mathbb{C}^N)$ в $H(\mathbb{C}^N)$. Ниже мы покажем, что $g * h \in P_\Omega$ для любых $g, h \in P_\Omega$.

Теорема 3. Для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$ выполняется равенство $\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$.

Доказательство. Вычислим $(\delta_\lambda \otimes \delta_\mu)(t)$ для $\lambda, \mu \in \Omega$ таких, что $\lambda_j \neq \mu_j$, $j \in P_N$, $t \in \mathbb{C}^N$. Учитывая лемму 1, получим

$$\begin{aligned} & (\delta_\lambda \otimes \delta_\mu)(t) = (\delta_\lambda \otimes \delta_\mu)(e_t) = (\delta_\lambda)_z (\delta_\mu(T_z(e_t))) = \\ & = (\delta_\lambda)_z \left((\delta_\mu)_u \left(\frac{1}{(u-z)^1} \sum_{\sigma \subseteq P_N} (-1)^{|\sigma|} u_{\sigma,z}^1 e^{\langle t, u_{\sigma,z} \rangle} \right) \right) = \frac{1}{(\mu-\lambda)^1} \sum_{\sigma \subseteq P_N} (-1)^{|\sigma|} \mu_{\sigma,\lambda}^1 e^{\langle t, \mu_{\sigma,\lambda} \rangle}. \end{aligned} \quad (4)$$

Найдем $(e_\lambda * e_\mu)(t)$, где $\lambda, \mu \in \Omega$, $\lambda_j \neq \mu_j$, $j \in P_N$, $t \in \mathbb{C}^N$:

$$\begin{aligned} & (e_\lambda * e_\mu)(t) := \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_N} e^{\langle \lambda, t-\xi \rangle} e^{\langle \mu, \xi \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_N = \\ & = \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \left(e^{\langle \lambda, t \rangle} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_N} e^{\langle \mu-\lambda, \xi \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_N \right) = \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \left(e^{\langle \lambda, t \rangle} \prod_{j=1}^N \frac{e^{(\mu_j-\lambda_j)t_j-1}}{\mu_j-\lambda_j} \right) = \\ & = \frac{\partial^N}{\partial t_1 \dots \partial t_N} \left(\frac{1}{(\mu-\lambda)^1} \sum_{\sigma \subseteq P_N} (-1)^{|\sigma|} e^{\langle t, \mu_{\sigma,\lambda} \rangle} \right) = \frac{1}{(\mu-\lambda)^1} \sum_{\sigma \subseteq P_N} (-1)^{|\sigma|} \mu_{\sigma,\lambda}^1 e^{\langle \mu_{\sigma,\lambda}, t \rangle}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\widehat{\delta_\lambda \otimes \delta_\mu} = e_\lambda * e_\mu, \lambda, \mu \in \Omega, \lambda_j \neq \mu_j, j \in P_N. \quad (6)$$

Так как отображение $\lambda \mapsto \delta_\lambda$ непрерывно из Ω в $H(\Omega)'_b$ и пространство P_Ω непрерывно вложено в $H(\mathbb{C}^N)$, то вследствие теоремы 1 равенство (6) выполняется для любых $\lambda, \mu \in \Omega$. Поскольку множество $\{\delta_\lambda: \lambda \in \Omega\}$ полно в $H(\Omega)'_b$, то $\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$. Теорема доказана.

Следствие 2. $g * h \in P_\Omega$ для любых $g, h \in P_\Omega$.

Представление $(H(\Omega)', \otimes)$ в $H(\Omega)$. Для $\varphi \in H(\Omega)'$ определим оператор $B_\varphi(f)(z) := \varphi(T_z(f))$, $z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$, линейный и непрерывный в $H(\Omega)$. Пусть $\mathcal{K}(D_0)$ – множество всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов B таких, что $BD_{j,0} = D_{j,0}B$ на $H(\Omega)$ для всех $j \in P_N$. С операцией композиции отображений $\mathcal{K}(D_0)$ – алгебра. По [1, теорема 3.1] линейное отображение $\rho: H(\Omega)' \rightarrow \mathcal{K}(D_0)$, $\rho(\varphi) := B_\varphi$ сюръективно. Поскольку $B_\varphi(f)(0) = \varphi(f)$, $f \in H(\Omega)$, $\varphi \in H(\Omega)'$, то ρ инъективно, а значит, биективно. Отметим равенство $(\varphi \otimes \psi)(f) = \varphi(B_\psi(f))$, $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$, $f \in H(\Omega)$.

Положим $S(M, K) := \{T_z(f): f \in M, z \in K\}$ для $M \subseteq H(\Omega)$, $K \subseteq \Omega$.

Лемма 2. Для любого компакта K в Ω , любого ограниченного множества M в $H(\Omega)$ множество сдвигов $S(M, K)$ ограничено в $H(\Omega)$.

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Найдется $m > n$, для которого $K \subseteq Q_m$. Поскольку M ограничено в $H(\Omega)$, то $C_m := \sup_{f \in M} \|f\|_{m+1} < +\infty$.

Пусть $d_j := \text{dist}(\partial Q_{m,j}, \partial Q_{m+1,j})$, $j \in P_N$; $d := d_1 \dots d_N$ (все числа d_j положительны). По лемме 1 $\sup_{z \in K} \sup_{f \in M} \|T_z(f)\|_n \leq \frac{1}{d} \sum_{\sigma \subseteq P_N} \max\{|f(t_{\sigma,z})|: t \in Q_{m+1}, z \in Q_m\} \leq \frac{2^N}{d} C_m$.

Значит, множество $S(M, K)$ ограничено в $H(\Omega)$.

Лемма 2 усиливает результат из [1, лемма 3.1] (в [1] это утверждение доказано для множества M , состоящего из одной функции).

Далее $\mathcal{B}(H(\Omega))$ обозначает множество всех ограниченных подмножеств $H(\Omega)$. Пусть $\mathcal{K}(D_0)_b$ – пространство $\mathcal{K}(D_0)$ с топологией ограниченной сходимости. Она задается семейством преднорм $\sup_{f \in M} \|B(f)\|_n$, $M \in \mathcal{B}(H(\Omega))$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. (i) Отображение $\rho(\varphi) := B_\varphi$, $\varphi \in H(\Omega)'$, является изоморфизмом алгебры $(H(\Omega)', \otimes)$ на алгебру $\mathcal{K}(D_0)$.

(ii) ρ – линейный топологический изоморфизм $H(\Omega)'_b$ на $\mathcal{K}(D_0)_b$.

Доказательство. (i) Вследствие [1, лемма 2.3 (v)] $B_\psi T_z = T_z B_\psi$ для любых $z \in \mathbb{C}^N$, $\psi \in H(\Omega)'$. Поэтому для всех $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$, $z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$

$$\begin{aligned} \rho(\varphi \otimes \psi)(f)(z) &= B_{\varphi \otimes \psi}(f)(z) = (\varphi \otimes \psi)(T_z(f)) = \varphi(B_\psi(T_z(f))) = \varphi\left(T_z\left(B_\psi(f)\right)\right) = \\ &= B_\varphi B_\psi(f)(z). \end{aligned}$$

Значит, $\rho(\varphi \otimes \psi) = \rho(\varphi)\rho(\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$. Кроме того, отображение ρ линейно.

(ii) Докажем, что непрерывно отображение $\rho: H(\Omega)'_b \rightarrow \mathcal{K}(D_0)_b$. Для любого ограниченного множества M в $H(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H(\Omega)'$

$$\sup_{f \in M} \|B_\varphi(f)\|_n = \sup_{f \in M} \max_{z \in Q_n} |\varphi(T_z(f))| \leq \sup_{g \in S(M, Q_n)} |\varphi(g)|.$$

Поскольку по лемме 2 множество $S(M, Q_n)$ ограничено в $H(\Omega)$, то ρ непрерывно.

Покажем, что отображение $\rho^{-1}: \mathcal{K}(D_0)_b \rightarrow H(\Omega)'_b$ непрерывно. Для ограниченного множества M в $H(\Omega)$ вследствие $0 \in Q_1$ и $\varphi(f) = B_\varphi(f)(0)$ получим

$$\sup_{f \in M} |\varphi(f)| = \sup_{f \in M} |B_\varphi(f)(0)| \leq \sup_{f \in M} \max_{z \in Q_1} |B_\varphi(f)(z)|, \varphi \in H(\Omega)'.$$

Поэтому ρ^{-1} непрерывно из $\mathcal{K}(D_0)_{b,0}$ в $H(\Omega)'_b$ и тем более из $\mathcal{K}(D_0)_b$ в $H(\Omega)'_b$. Теорема доказана.

Список источников

1. Ivanov P.A., Melikhov S.N. Pommiez Operator in Spaces of Analytic Functions of Several Complex Variables // J. of Math. Sciences. 2021. Vol. 252, № 3. P. 345–359.
2. Иванова О.А., Мелихов С.Н. Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля // Владикавказский мат. журн. 2020. Т. 22, № 3. С. 72–84.
3. Wigley N. The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J. 1974. Vol. 41. P. 211–217.
4. Merryfield K., Watson S. A local algebra structure for H of the polydisc // Colloquium Mathematicum. 1991. Vol. 61. P. 73–79.
5. Караев М.Т. Алгебры Дюамеля и их приложения // Функци. анализ и его приложения. 2018. Т. 52, вып. 1. С. 3–12.
6. Binderman Z. Functional shifts induced by right invertible operators // Math. Nachr. 1992. Vol. 157. P. 211–224.
7. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1072 с.
8. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969. 576 с.
9. Напалков В.В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982. 240 с.
10. Trutnev V.M. Convolution equations in spaces of entire functions of exponential type // J. Math. Sci. (N.Y.). 2004. Vol. 120, № 6. P. 1901–1915.

References

1. Ivanov P.A., Melikhov S.N. Pommiez Operator in Spaces of Analytic Functions of Several Complex Variables. *Journal of Math. Sciences*. 2021;252(3):345-359.
2. Ivanova O.A., Melikhov S.N. Algebras of analytic functionals and the generalized Duhamel product. *Vladikavk. matem. zhurn. = Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2020;22(3):72-84. (In Russ.).
3. Wigley N. The Duhamel product of analytic functions. *Duke Math. J.* 1974;41:211-217.
4. Merryfield K., Watson S. A local algebra structure for H of the polydisc. *Colloquium Mathematicum*. 1991;61:73-79.

5. Karaev M.T. Duhamel algebras and applications. *Functional Analysis and its Applications*. 2018;52(1):1-8.
6. Binderman Z. Functional shifts induced by right invertible operators. *Math. Nachr.* 1992;157:211-224.
7. Edwards R. *Functional analysis. Theory and applications*. Moscow: Mir Publ.; 1969. 1072 p. (In Russ.).
8. Shabat B.V. *Introduction to complex analysis*. Moscow: Nauka Publ.; 1969. 576 p. (In Russ.).
9. Napalkov V.V. *Convolution equations in multidimensional spaces*. Moscow: Nauka Publ.; 1982. 240 p. (In Russ.).
10. Trutnev V. M. Convolution equations in spaces of entire functions of exponential type. *J. Math. Sci. (N. Y.)*. 2004;120(6):1901-1915.

Информация об авторе

П.А. Иванов – аспирант, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the author

P.A. Ivanov - Postgraduate Student, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 07.07.2022; одобрена после рецензирования 20.07.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 07.07.2022; approved after reviewing 20.07.2022; accepted for publication 15.11.2022.

Научная статья

УДК 517.982.3+517.983.22

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-102-108

О СОПРЯЖЕННОМ К ПРОСТРАНСТВУ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ НА ЗАМКНУТОМ ПОЛИДИСКЕ, С МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СВЕРТКОЙ

Ольга Александровна Иванова¹, Сергей Николаевич Мелихов²✉

^{1, 2}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

¹ivolga@sfedu.ru

²snmelihov@sfedu.ru✉

Аннотация. Изучена алгебра аналитических функционалов на замкнутом единичном полидиске \overline{D}_1 в \mathbb{C}^N . Охарактеризованы операторы адамаровского типа в пространстве $H(\overline{D}_1)$ всех ростков функций, голоморфных на \overline{D}_1 . Получено представление упомянутой алгебры в $H(\overline{D}_1)$ в виде алгебры операторов адамаровского типа. Описаны мультипликативные функционалы на ней, ее радикал Джекобсона и идемпотенты.

Ключевые слова: оператор адамаровского типа, алгебра, мультипликативная свертка

Для цитирования: Иванова О.А., Мелихов С.Н. О сопряженном к пространству функций, голоморфных на замкнутом полидиске, с мультипликативной сверткой // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 102–108.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

ON THE CONJUGATE TO THE SPACE OF FUNCTIONS THAT ARE HOLOMORPHIC ON A CLOSED POLYDISK WITH MULTIPLICATIVE CONVOLUTION

Olga A. Ivanova¹, Sergej N. Melikhov²✉

^{1, 2}Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

²Southern Mathematical Institute – Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, Russia

¹ivolga@sfedu.ru

²snmelihov@sfedu.ru✉

Abstract. The algebra of analytic functionals on the closed unit polydisk \overline{D}_1 in \mathbb{C}^N is studied. The Hadamard type operators are characterized in the space $H(\overline{D}_1)$ of all germs of holomorphic on \overline{D}_1 functions. We obtain the representation of mentioned algebra in $H(\overline{D}_1)$ as the Hadamard type operators algebra. The multiplicative functionals on it, its Jacobson radical and idempotents are described.

Keywords: Hadamard type operator, algebra, multiplicative convolution

For citation: Ivanova O.A., Melikhov S.N. On the Conjugate to the Space of Functions That are Holomorphic on a Closed Polydisk with Multiplicative Convolution. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):102-108. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

© Иванова О.А., Мелихов С.Н., 2022

Введение

В настоящей работе исследуется алгебра аналитических функционалов на замкнутом единичном полидиске в \mathbb{C}^N с мультипликативным умножением. Ранее оно было введено и изучено в пространстве \mathcal{E}' всех обобщенных функций на \mathbb{R}^d с компактным носителем [1]. Рассмотренная мультипликативная свертка задается действием линейного непрерывного функционала на заданном локально выпуклом пространстве на оператор композиции, определяемый по координатным умножением переменных. Интерес к конструкции подобного рода вызван, в частности, тем, что она во многих случаях является адамаровским произведением и описывает операторы адамаровского типа. Так называются линейные непрерывные операторы в локально выпуклом пространстве, содержащем все многочлены, для которых любой моном является их собственной функцией. В последнее время адамаровские операторы интенсивно изучаются в пространствах вещественно аналитических, бесконечно дифференцируемых функций и распределений [1–11]. В пространствах всех голоморфных функций в областях Ω в \mathbb{C}^N они подробно исследованы только в случаях одной переменной [12–15] и $\Omega = \mathbb{C}^N$ [16]. В данной статье мультипликативная свертка \otimes определяется и исследуется в топологическом сопряженном $H(\overline{D_1})'$ к пространству ростков всех функций, голоморфных на замкнутом единичном полидиске $\overline{D_1}$ в \mathbb{C}^N . Характеризуются адамаровские операторы в $H(\overline{D_1})$, строится представление алгебры $(H(\overline{D_1})', \otimes)$ в $H(\overline{D_1})$. (Образом соответствующего гомоморфизма является алгебра адамаровских операторов в $H(\overline{D_1})$.) Исследованы ее различные характеристики: описаны мультипликативные функционалы на ней, ее радикал Джекобсона и идемпотенты. Основным используемым методом является привлечение пространств последовательностей тейлоровских коэффициентов функций, моментов функционалов из рассматриваемых пространств и соответствующей техники.

Сведения из теории локально выпуклых пространств и пространств последовательностей, используемые здесь без ссылок, можно найти в [17–19].

Адамаровские операторы в пространстве функций, голоморфных на замкнутом единичном полидиске

Мультипликативное умножение, о котором пойдет речь ниже, естественным образом связано с адамаровскими (диагональными) операторами. Опишем такие операторы в пространстве ростков всех функций, голоморфных на замкнутом единичном полидиске.

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$; для $r > 0$ положим $D_r := \{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| < r, 1 \leq j \leq N\}$, $\overline{D_r} := \{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| \leq r, 1 \leq j \leq N\}$. Для множеств $Q, R \subseteq \mathbb{C}^N$ введем их по координатное произведение $Q \cdot R := \{(t_j z_j)_{j=1}^N : t \in Q, z \in R\}$.

Отметим, что для любых $r, \rho > 0$ выполняется равенство $D_r \cdot D_\rho = D_{r\rho}$.

Пусть $H(D_r)$ – пространство всех голоморфных функций в D_r с топологией равномерной сходимости на компактах D_r . Символ $H(\overline{D_1})$ обозначает пространство ростков всех функций, голоморфных на $\overline{D_1}$, т.е. голоморфных в некоторой открытой окрестности $\overline{D_1}$. Имеет место алгебраическое равенство $H(\overline{D_1}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H(D_{1+1/n})$. Введем в $H(\overline{D_1})$ топологию индуктивного предела последовательности пространств Фреше $H(D_{1+1/n})$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их естественных вложений в $H(\overline{D_1})$.

Далее $\mathcal{L}(H(\overline{D_1}))$ – пространство всех линейных непрерывных операторов в $H(\overline{D_1})$. Пусть $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $f_\alpha(z) := z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $z \in \mathbb{C}^N$.

Оператор $A \in \mathcal{L}(H(\overline{D_1}))$ называется адамаровским (оператором адамаровского типа), если для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ найдется $c_\alpha \in \mathbb{C}$, для которого $A(f_\alpha) = c_\alpha f_\alpha$. Через $\mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))$ обозначим множество всех адамаровских операторов в $H(\overline{D_1})$. Оно является подпространством $\mathcal{L}(H(\overline{D_1}))$ и подалгеброй $\mathcal{L}(H(\overline{D_1}))$ с операцией композиции в качестве умножения.

Полагаем $|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_N!$ для $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Для $n \in \mathbb{N}$ определим банаховы пространства последовательностей

$M_{1,n} := \left\{ c = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} : \|c\|_n := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{|\alpha|} < +\infty \right\}$ и положим $M_1 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{1,n}$.

Введем в M_1 топологию индуктивного предела последовательности пространств $(M_{1,n}, \|\cdot\|_n)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в M_1 . Из неравенств Коши [20, гл. 1, §4] следует, что отображение $f \mapsto \left(\frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}\right)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ является линейным топологическим изоморфизмом $H(\overline{D}_1)$ на M_1 .

Для $n \geq 2$ введем также банаховы пространства последовательностей

$$L_{1,n} := \left\{c = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} : p_n(c) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{|\alpha|} < +\infty\right\}$$

и определим $L_1 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_{1,n}$. В L_1 зададим локально выпуклую топологию набором норм $p_n, n \in \mathbb{N}$. С ней L_1 является пространством Фреше. Ниже $H(\overline{D}_1)'$ – сильное сопряженное к $H(\overline{D}_1)$. Отображение $\varphi \mapsto (\varphi(f_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ является линейным топологическим изоморфизмом $H(\overline{D}_1)'$ на L_1 .

Положим $ab := (a_\alpha b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ для $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N}$. Отметим, что L_1 совпадает с множеством мультипликаторов $\mu(M_1) := \{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} : ab \in M_1 \text{ для любого } b \in M_1\}$. Кроме того, $(\tau(f_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \in \mu(M_1)$ для любой непрерывной на $H(\overline{D}_1)$ преднормы τ .

Теорема 1. Следующие утверждения равносильны:

(i) $A \in \mathcal{L}_n(H(\overline{D}_1))$.

(ii) Существует функционал $\varphi \in H(\overline{D}_1)'$ такой, что

$$A(f)(z) = \varphi_t(f(tz)), f \in H(\overline{D}_1). \tag{1}$$

Для любого $A \in \mathcal{L}_n(H(\overline{D}_1))$ функционал φ , как в (ii), единствен.

Доказательство. (i) \Rightarrow (ii). Пусть $A(f_\alpha) = c_\alpha f_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Тогда для любой функции $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha f_\alpha \in H(\overline{D}_1)$ выполняется равенство $A(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha c_\alpha f_\alpha$ (последний ряд абсолютно сходится в $H(\overline{D}_1)$) и $ac \in M_1$. Значит, $c \in \mu(M_1) = L_1$. Существует функционал $\varphi \in H(\overline{D}_1)'$, для которого $\varphi(f_\alpha) = c_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}_0^N$. При этом $A(f_\alpha)(z) = \varphi_t(f_\alpha(tz))$ для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^N, z \in \mathbb{C}^N$. Введем оператор $B(f)(z) := \varphi_t(f(tz)), f \in H(\overline{D}_1)$ (z принадлежит некоторой открытой окрестности \overline{D}_1 , зависящей от f). Он линеен и непрерывен в $H(\overline{D}_1)$ и $B(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha c_\alpha f_\alpha = A(f)$ для любой функции $f \in H(\overline{D}_1)$.

(ii) \Rightarrow (i). При доказательстве импликации (i) \Rightarrow (ii) уже отмечено, что оператор $f \mapsto \varphi_t(f(tz))$ линеен и непрерывен в $H(\overline{D}_1)$. Ясно, что он адямаровский.

Так как для функционала φ в представлении (1) выполняются равенства $A(f_\alpha) = \varphi(f_\alpha)f_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}_0^N$, и множество всех многочленов плотно в $H(\overline{D}_1)$, то функционал φ , как в (1), единствен. Теорема доказана.

Мультипликативная свертка в $H(\overline{D}_1)'$

Следуя [1], определим мультипликативное умножение (свертку) для $\varphi, \psi \in H(\overline{D}_1)'$ $(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi_t(f(tz))), f \in H(\overline{D}_1)$.

Положим $A_\psi(f)(z) := \psi_t(f(tz)), f \in H(\overline{D}_1)$ (z принадлежит некоторому полидиску D_r , где $r > 1$ зависит от f). По теореме 1 оператор A_ψ линеен и непрерывен в $H(\overline{D}_1)$. Поэтому $\varphi \otimes \psi = \varphi A_\psi$ – линейный непрерывный функционал на $H(\overline{D}_1)$ для любых $\varphi, \psi \in H(\overline{D}_1)'$. При этом произведение $\varphi \otimes \psi$ выражается через моменты функционалов φ и ψ . Именно для любой функции $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} a_\alpha f_\alpha \in H(\overline{D}_1)$ выполняется равенство

$$(\varphi \otimes \psi)(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \varphi(f_\alpha) \psi(f_\alpha) a_\alpha. \tag{2}$$

Введем функционалы $\delta_0^\alpha(f) := f^{(\alpha)}(0), f \in H(\overline{D}_1), \alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Ясно, что $\delta_0^\alpha \in H(\overline{D}_1)', \alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Отметим, что для любого $\varphi \in H(\overline{D}_1)'$ $\varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{\varphi(f_\alpha)}{\alpha!} \delta_0^\alpha$, причем последний ряд абсолютно сходится в $H(\overline{D}_1)'$.

Замечание. Сильная топология в $H(\overline{D}_1)'$ задается последовательностью преднорм

$$r_n(\varphi) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |\varphi(f_\alpha)| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{|\alpha|}, \varphi \in H(\overline{D}_1)', n \geq 2.$$

Часто вместо нее удобно использовать другие семейства непрерывных преднорм, определяющих сильную топологию в $H(\overline{D}_1)'$, а именно

$$q_d(\varphi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |\varphi(f_\alpha)| |d_\alpha|, \varphi \in H(\overline{D_1})', d \in M_1; \tilde{q}_d(\varphi) = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} (|d_\alpha| |\varphi(f_\alpha)|), d \in M_1.$$

Изучим свойства введенного умножения \otimes . Символ $\mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))_p$ обозначает пространство $\mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))$ с топологией поточечной сходимости. Пусть $\mathcal{P}(H(\overline{D_1}))$ – множество всех непрерывных на $H(\overline{D_1})$ преднорм. Топология в $\mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))_p$ задается семейством преднорм

$$s_{\tau, f}(A) := \tau(A(f)), \tau \in \mathcal{P}(H(\overline{D_1})), f \in H(\overline{D_1}).$$

$$\text{Для } f \in H(\overline{D_1}) \text{ полагаем } a_\alpha(f) := \frac{f^{(\alpha)}(0)}{\alpha!}, \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Теорема 2. (i) $(H(\overline{D_1})', \otimes)$ – унитарная коммутативная и ассоциативная топологическая алгебра.

(ii) Отображение $\chi(\varphi) := A_\varphi, \varphi \in H(\overline{D_1})'$, является изоморфизмом алгебры $(H(\overline{D_1})', \otimes)$ на алгебру $\mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))$.

(iii) χ – линейный топологический изоморфизм $H(\overline{D_1})'$ на $\mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))_p$.

Доказательство. (i) Коммутативность и ассоциативность умножения \otimes следуют из равенства (2). Покажем, что $e = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{1}{\alpha!} \delta_0^\alpha$ – единица алгебры $(H(\overline{D_1})', \otimes)$. Прежде всего, ряд в определении e абсолютно сходится в $H(\overline{D_1})'$. Зафиксируем $\varphi \in H(\overline{D_1})'$. Поскольку для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ $(\varphi \otimes e)(f_\alpha) = \varphi_z(e_t(t^\alpha z^\alpha)) = \varphi(f_\alpha) \left(\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \frac{1}{\beta!} \delta_0^\beta(f_\alpha) \right) = \varphi(f_\alpha)$, то $\varphi \otimes e = \varphi$.

Покажем, что рассматриваемая алгебра является топологической. Так как для любого $d \in M_1$ мультипоследовательность $\sqrt{|d|} := (\sqrt{|d_\alpha|})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ принадлежит M_1 , то для любых $\varphi, \psi \in H(\overline{D_1})', d \in M_1$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_d(\varphi \otimes \psi) &= \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} (|d_\alpha| |(\varphi \otimes \psi)(f_\alpha)|) = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} (|d_\alpha| |\varphi(f_\alpha)| |\psi(f_\alpha)|) \leq \\ &\leq \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} (\sqrt{|d_\alpha|} |\varphi(f_\alpha)|) \cdot \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} (\sqrt{|d_\alpha|} |\psi(f_\alpha)|) = \tilde{q}_{\sqrt{|d|}}(\varphi) \cdot \tilde{q}_{\sqrt{|d|}}(\psi). \end{aligned}$$

Значит, отображение $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ непрерывно из $H(\overline{D_1})' \times H(\overline{D_1})'$ в $H(\overline{D_1})'$.

Утверждение (ii) следует из равенства (2).

(iii) Покажем, что $\chi: H(\overline{D_1})' \rightarrow \mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))_p$ непрерывно. Действительно, для любых $\tau \in \mathcal{P}(H(\overline{D_1})), f \in H(\overline{D_1})$, для $d = (|a_\alpha(f)| \tau(f_\alpha))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \in M_1$

$$s_{\tau, f}(A_\varphi) = \tau \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \varphi(f_\alpha) a_\alpha(f) f_\alpha \right) \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |\varphi(f_\alpha)| |a_\alpha(f)| \tau(f_\alpha) = q_d(\varphi), \varphi \in H(\overline{D_1})'.$$

Покажем теперь, что $\chi^{-1}: \mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))_p \rightarrow H(\overline{D_1})'$ непрерывно. Зафиксируем $d \in M_1$. Положим $h := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} d_\alpha f_\alpha, \tau(g) := \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \frac{|g^{(\beta)}(0)|}{\beta!}, g \in H(\overline{D_1})$.

Тогда τ – непрерывная на $H(\overline{D_1})$ преднорма, $h \in H(\overline{D_1})$ и

$$\begin{aligned} \tilde{q}_d(\varphi) &= \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} (|d_\beta| |\varphi(f_\beta)|) = \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} \left| \frac{1}{\beta!} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \varphi(f_\alpha) d_\alpha f_\alpha \right)^{(\beta)}(0) \right| = \\ &= \tau \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \varphi(f_\alpha) d_\alpha f_\alpha \right) = \tau(A_\varphi(h)) = s_{\tau, h}(A_\varphi), \varphi \in H(\overline{D_1})'. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Обратимся к ситуации, близкой к рассмотренной. Пусть $\mathcal{L}_h(H(D_1))$ – множество всех адамаровских операторов, линейных и непрерывных в $H(D_1)$. Как и теорема 1, доказывается

Теорема 3. Следующие утверждения равносильны:

(i) $A \in \mathcal{L}_h(H(D_1))$.

(ii) Существует функционал $\varphi \in H(\overline{D_1})'$ такой, что $A(f)(z) = \varphi_t(f(tz)), z \in D_1, f \in H(D_1)$.

Для любого $A \in \mathcal{L}_h(H(D_1))$ функционал φ , как в (ii), единствен.

Замечание. Способом, описанным выше для $H(\overline{D_1})'$, нельзя ввести мультипликативное умножение в $H(D_1)'$, топологическом сопряженном к $H(D_1)$. Действительно, в теореме 3 оператор A действует в $H(D_1)$, а функционал φ выбирается из сопряженного к $H(\overline{D_1})$ пространства.

Мультипликативные функционалы на $(H(\overline{D_1})', \otimes)$. Побудительным мотивом этой части работы является [3, §3]. Для $f \in H(\overline{D_1})$ положим $\pi_f(\varphi) := \varphi(f), \varphi \in H(\overline{D_1})'$.

Выясним, для каких $f \in H(\overline{D_1})$ функционал π_f мультипликативен на алгебре $(H(\overline{D_1})', \otimes)$.

Теорема 4. Следующие утверждения равносильны для ненулевой функции $f \in H(\overline{D_1})$:

(i) Функционал π_f мультипликативный.

(ii) Существует $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, для которого $f = f_\alpha$.

Доказательство. (ii) \Rightarrow (i). Для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, любых $\varphi, \psi \in H(\overline{D_1})'$

$$\pi_{f_\alpha}(\varphi \otimes \psi) = \varphi_z(\psi_t(t^\alpha z^\alpha)) = \pi_{f_\alpha}(\varphi) \cdot \pi_{f_\alpha}(\psi).$$

(i) \Rightarrow (ii). Пусть функционал π_f мультипликативен. Для $\varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \delta_0^\alpha$, $\psi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{d_\alpha}{\alpha!} \delta_0^\alpha \in H(\overline{D_1})'$ выполняется равенство $\varphi \otimes \psi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha d_\alpha}{\alpha!} \delta_0^\alpha$.

Поэтому

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha d_\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0) \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{d_\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0). \quad (3)$$

Предположим, что существуют $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$, $\alpha \neq \beta$, для которых $f^{(\alpha)}(0) \neq 0$ и $f^{(\beta)}(0) \neq 0$. Возьмем $c := (\delta_{\alpha\beta})_{\beta \in \mathbb{N}_0^N}$ и $d := (\delta_{\alpha\beta})_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$ ($\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера). Тогда в (3) слева стоит 0, а справа – $\frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0) \cdot \frac{1}{\beta!} f^{(\beta)}(0) \neq 0$. Получено противоречие. Поэтому существует $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ такое, что $f^{(\beta)}(0) = 0$, если $\beta \neq \alpha$. Значит, $f = C f_\alpha$, $C \in \mathbb{C}$. Ясно, что $C = 1$. Теорема доказана.

Из предыдущей теоремы вытекает, что радикал Джекобсона алгебры $(H(\overline{D_1})', \otimes)$ тривиален. Действительно, согласно [21, гл. 4, §4.3, предложение] радикал Джекобсона J алгебры $(H(\overline{D_1})', \otimes)$ является пересечением всех ее максимальных идеалов. Поскольку ядра $\text{Ker } \pi_{f_\alpha}$ функционалов π_{f_α} , $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, являются максимальными идеалами алгебры $(H(\overline{D_1})', \otimes)$ и $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \text{Ker } \pi_{f_\alpha} = \{0\}$, то $J = \{0\}$. Получили

Следствие 1. Радикал Джекобсона алгебры $(H(\overline{D_1})', \otimes)$ – нулевой.

Идемпотенты. В структурной теории алгебр и модулей над алгебрами важную роль играют идемпотенты. Опишем все идемпотенты $(H(\overline{D_1})', \otimes)$, т.е. функционалы $\varphi \in H(\overline{D_1})'$ такие, что $\varphi \otimes \varphi = \varphi$. Отметим, что таким функционалам φ по теореме 2 соответствуют проекторы $A_\varphi \in \mathcal{L}_h(H(\overline{D_1}))$.

Теорема 5. Функционал $\varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \delta_0^\alpha \in H(\overline{D_1})'$ является идемпотентом тогда и только тогда, когда $c_\alpha = 0$ или $c_\alpha = 1$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Доказательство. Утверждение является следствием равенства $\varphi \otimes \varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha^2}{\alpha!} \delta_0^\alpha$ и единственности разложения элементов $H(\overline{D_1})'$ в ряд по системе $\{\delta_0^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$.

По [21, §6.4] идемпотент g алгебры \mathcal{A} называется примитивным, если в \mathcal{A} не существует идемпотента f такого, что $f \neq 0, f \neq g$ и $fg = gf = f$.

Следствие 2. Любой функционал $\frac{1}{\alpha!} \delta_0^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, является примитивным идемпотентом алгебры $(H(\overline{D_1})', \otimes)$. Всякий примитивный идемпотент $(H(\overline{D_1})', \otimes)$ совпадает с некоторым функционалом $\frac{1}{\alpha!} \delta_0^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Список источников

1. Vogt D. \mathcal{E}' as an algebra by multiplicative convolution // Funct. Approx. Comment. Math. 2018. Vol. 59, № 1. P. 117–128.
2. Domański P., Langenbruch M. Representation of multipliers on spaces of real analytic functions // Analysis. 2012. Vol. 32. P. 137–162.
3. Domański P., Langenbruch M. Algebra of multipliers on the space of real analytic functions of one variable // Studia Math. 2012. Vol. 212. P. 155–171.
4. Domański P., Langenbruch M. Hadamard multipliers on spaces of real analytic functions // Adv. Math. 2013. Vol. 240. P. 575–612.
5. Domański P., Langenbruch M. Multiplier projections on spaces of real analytic functions in several variables // Comp. Var. Elliptic Equ. 2017. Vol. 62. P. 241–268.
6. Domański P., Langenbruch M. Surjectivity of Hadamard type operators on spaces of smooth functions // Revista de la Real Acad. de Ciencias Ex. Fis. Y Naturales Serie A-Mat. 2019. Vol. 113. P. 1625–1676.

7. Domański P., Langenbruch M., Vogt D. Hadamard type operators on spaces of real analytic functions in several variables // *J. Funct. Anal.* 2015. Vol. 269. P. 3868–3913.
8. Vogt D. Hadamard type operators on spaces of smooth functions // *Math. Nachr.* 2015. Vol. 288. P. 353–361.
9. Vogt D. Hadamard operators on $D'\mathbb{R}^N$ // *Studia Math.* 2017. Vol. 237. P. 137–152.
10. Vogt D. Hadamard operators on $D'\Omega$ // *Math. Nachr.* 2017. Vol. 290. P. 1374–1380.
11. Vogt D. Hadamard type operators on temperate distributions // *J. Math. Anal. Appl.* 2020. Vol. 481, № 2. P. 123499.
12. Линчук С.С. Диагональные операторы в пространствах аналитических функций и их приложения. Актуальные вопросы теории функций. Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1987. С. 118–121.
13. Братищев А.В. О линейных операторах, символ которых является функцией произведения своих аргументов // Докл. РАН. 1999. Т. 365, № 1. С. 9–12.
14. Братищев А.В. Об операторах обобщенного дифференцирования Гельфонда – Леонтьева // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения: темат. обзор. 2018. Т. 153. С. 29–54.
15. Trybula M. Hadamard multipliers on spaces of holomorphic functions // *Int. Equ. Oper. Theory.* 2015. Vol. 88. P. 249–268.
16. Иванова О.А., Мелихов С.Н. Операторы почти адямаровского типа и оператор Харди – Литтлвуда в пространстве целых функций многих комплексных переменных // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 1. С. 52–64.
17. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967. 257 с.
18. Драгилев М.М. Базисы в пространствах Кёте. Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1983. 144 с.
19. Коробейник Ю.Ф. Операторы сдвига на числовых семействах. Ростов н/Д.: Изд-во РГУ, 1983. 160 с.
20. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 411 с.
21. Пирс Р. Ассоциированные алгебры. М.: Мир, 1986. 543 с.

References

1. Vogt D. \mathcal{E}' as an algebra by multiplicative convolution. *Funct. Approx. Comment. Math.* 2018;59(1):117-128.
2. Domański P., Langenbruch M. Representation of multipliers on spaces of real analytic functions. *Analysis.* 2012;32:137-162.
3. Domański P., Langenbruch M. Algebra of multipliers on the space of real analytic functions of one variable. *Studia Math.* 2012;212:155-171.
4. Domański P., Langenbruch M. Hadamard multipliers on spaces of real analytic functions. *Adv. Math.* 2013;240:575-612.
5. Domański P., Langenbruch M. Multiplier projections on spaces of real analytic functions in several variables. *Comp. Var. Elliptic Equ.* 2017;62:241-268.
6. Domański P., Langenbruch M. Surjectivity of Hadamard type operators on spaces of smooth functions. *Revista de la Real Acad. de Ciencias Ex. Fis. Y Naturales Serie A-Mat.* 2019;113:1625-1676.
7. Domański P., Langenbruch M., Vogt D. Hadamard type operators on spaces of real analytic functions in several variables. *J. Funct. Anal.* 2015;269:3868-3913.
8. Vogt D. Hadamard type operators on spaces of smooth functions. *Math. Nachr.* 2015;288:353-361.
9. Vogt D. Hadamard operators on $D'(\mathbb{R}^N)$. *Studia Math.* 2017;237:137-152.
10. Vogt D. Hadamard operators on $D'(\Omega)$. *Math. Nachr.* 2017;290:1374-1380.
11. Vogt D. Hadamard type operators on temperate distributions. *J. Math. Anal. Appl.* 2020;481(2):123499.
12. Linchuk S.S. Diagonal operators in spaces of analytic functions and their applications. *Topical problems of function theory.* Rostov-on-Don: Rostov State University Press; 1987:118-121. (In Russ.).
13. Bratishchev A.V. On linear operators whose symbol is a function of the product of its arguments. *Dokl. RAN = Reports of the Russian Academy of Sciences.* 1999;365(1):9-12. (In Russ.).
14. Bratishchev A.V. On Gelfond-Leontiev operators of generalized differentiation. *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic overview.* 2018;153:29-54. (In Russ.).
15. Trybula M. Hadamard multipliers on spaces of holomorphic functions. *Int. Equ. Oper. Theory.* 2015;88:249-268.
16. Ivanova O. A., Melikhov S. N. Operators of Almost Hadamard-Type and the Hardy-Littlewood Operator in the Space of Entire Functions of Several Complex Variables. *Math. Notes.* 2021;110(1):61-71.
17. Robertson A.P., Robertson V.J. *Topological vector spaces.* Moscow: Mir Publ.; 1967. 257 p. (In Russ.).

18. Dragilev M.M. *Basises in Köthe spaces*. Rostov-on-Don: Rostov State University Press; 1983. 144 p. (In Russ.).
19. Korobeinik Yu.F. *Shift operators on numerical families*. Rostov-on-Don: Rostov State University Press; 1983. 160 p. (In Russ.).
20. Vladimirov V.S. *Methods in the theory of functions of several complex variables*. Moscow: Nauka Publ.; 1964. 411 p. (In Russ.).
21. Pierce R. *Associated algebras*. Moscow: Mir Publ.; 1986. 543 p. (In Russ.).

Информация об авторах

О.А. Иванова – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и геометрии, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

С.Н. Мелихов – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет; ведущий научный сотрудник, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН.

Information about the authors

O.A. Ivanova - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Geometry, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

S.N. Melikhov - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University; Leading Researcher, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences.

*Статья поступила в редакцию 07.07.2022; одобрена после рецензирования 20.07.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 07.07.2022; approved after reviewing 20.07.2022; accepted for publication 15.11.2022.*

Научная статья

УДК 517.5+519.4

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-109-119

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА π -СВЕРТКИ

Юрий Сергеевич Саранчук

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

89182859942@mail.ru

Аннотация. Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие однородному уравнению типа свертки, называются его элементарными решениями. Традиционное решение однородного уравнения типа свертки предполагает доказательство аппроксимационной теоремы, утверждающей плотность элементарных решений во множестве всех решений уравнения. В данной статье рассмотрены однородные уравнения типа π -свертки в пространстве аналитических функций на выпуклой области, обобщающие известные однородные уравнения типа свертки. Уравнения частного вида рассматривались ранее неоднократно. К ним относятся однородные уравнения: свертки, q -сторонней свертки, типа q -сторонней свертки и π -свертки. В статье исследованы свойства операторов типа π -свертки и доказана аппроксимационная теорема для однородного уравнения типа π -свертки в произвольной выпуклой области комплексной плоскости.

Ключевые слова: оператор сложного типа, оператор типа свертки, однородное уравнение типа свертки в комплексной области

Для цитирования: Саранчук Ю.С. Однородные уравнения типа π -свертки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 4-1. С. 109–119.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

HOMOGENEOUS EQUATIONS OF π -CONVOLUTION TYPE

Yury S. Saranchuk

Kuban State University, Krasnodar, Russia

89182859942@mail.ru

Abstract. Exponential polynomials satisfying a homogeneous convolution type equation are called its elementary solutions. The traditional solution of a homogeneous equation of the convolution type involves the proof of an approximation theorem that asserts the density of elementary solutions in the set of all solutions of the equation. This article considers homogeneous equations of the π -convolution type in the space of analytic functions on a convex domain, which generalize the well-known homogeneous equations of the convolution type. Equations of a particular form have been considered many times before. Such equations include homogeneous convolution equations, homogeneous q -sided convolution equations, homogeneous q -sided convolution type equations, and homogeneous-convolution equations. In the article the properties of operators of π -convolution type are investigated and an approximation theorem for a homogeneous equation of π -convolution type in an arbitrary convex domain of the complex plane is proved.

© Саранчук Ю.С., 2022

Keywords: *shift type operator, convolution type operator, homogeneous convolution type equation in the complex domain*

For citation: Saranchuk Yu.S. Homogeneous Equations of π -Convolution Type. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-1):109-119. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Выберем произвольный многочлен $\pi(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]$ степени $q \geq 1$. Целая функция $g(\xi)$ называется целой симметричной, если она представляется в виде композиции $g(\xi) = (f \circ \pi)(\xi)$, где $f(\lambda)$ – целая функция. Для любой целой функции $g(\xi)$ имеет место единственное симметричное представление $g(\xi) = \xi^0 g_0(\xi) + \dots + \xi^{q-1} g_{q-1}(\xi)$, где $g_0(\xi), \dots, g_{q-1}(\xi)$ – целые симметричные функции [1]. Пусть $a_0(\xi), \dots, a_{q-1}(\xi)$ – набор элементов кольца $\mathbb{C}[\xi]$, не все из которых равны нулю. Считаем, что степень полинома $a_p(\xi)$ не превосходит p . Эндоморфизм A пространства целых функций, действующий по правилу

$$A : g(\xi) \mapsto a_0(\xi)g_0(\xi) + \dots + a_{q-1}(\xi)g_{q-1}(\xi), \quad (1)$$

называем порождающим. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ – односвязная область; $O(\Omega)$ – пространство аналитических в области Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Линейный дифференциальный оператор $AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{h\xi})^{(n)}(0)}{n!} (D^n f)(z)$, порождаемый непрерывным эндоморфизмом (1), называем оператором π -сдвига. Далее выберем произвольный линейный непрерывный функционал S_0 на пространстве $O(\Omega)$. Линейный оператор $AM_{S_0} : f \mapsto \langle S_0, AT_h(f) \rangle$ называем оператором π -свертки. Порождающий эндоморфизм (1) является непрерывным (предложение 6) и при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|A(\xi^n)(\xi)|}{\exp \varepsilon |\xi|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{предложение 7}).$$

По свойствам аналитических функционалов можно считать, что функционал S_0 непрерывен на пространстве $O(\Omega_0)$, где $\Omega_0 \subseteq \Omega$ – односвязная область, удовлетворяющая условию $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$ при некотором $\varepsilon > 0$, где U_ε – открытый круг с центром в начале радиуса ε . По [2, предложение 11] оператор типа сдвига AT_h действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$, а по [2, предложение 13] оператор типа свертки AM_{S_0} действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$. Операторы $AT_h : O(\Omega) \mapsto O(\Omega_0)$ и $AM_{S_0} : O(\Omega) \mapsto O(U_\varepsilon)$ – непрерывные (предложения 9, 10). Значит, оператор $AT_h : O(\Omega) \mapsto O(\Omega_0)$ является оператором A -сдвига, а оператор $AM_{S_0} : O(\Omega) \mapsto O(U_\varepsilon)$ – оператором A -свертки [3].

Предложения 6, 7, 9, 10 будут доказаны ниже.

Уравнение $AM_{S_0}(f) = 0$, $f \in O(\Omega_0)$ называем однородным уравнением π -свертки. Уравнения частного вида рассматривались ранее неоднократно. К ним относятся однородные уравнения: свертки [4], q -сторонней свертки [5], π -свертки [6], обобщенной q -сторонней свертки [7, 8]. Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие однородному уравнению типа свертки, называются его элементарными решениями. Традиционное решение однородного

уравнения типа свертки предполагает доказательство аппроксимационной теоремы, утверждающей плотность элементарных решений во множестве всех решений уравнения.

Линейный непрерывный оператор (1) называется оператором симметризации, если существуют такие полиномы $\pi_0, \pi_1 \in \mathbb{C}[\xi]$, что $A(\pi_0(\xi)) = \pi_0(\xi)$ и $A(\mathbb{C}[\xi]) = \pi_0(\xi)\mathbb{C}[\pi_1(\xi)]$. Справедлива следующая

Теорема. Если область $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ – выпуклая и непрерывный эндоморфизм (1) – оператор симметризации, то для однородного уравнения π -свертки $AM_{S_0}(f) = 0$, $f \in O(\Omega_0)$, справедлива аппроксимационная теорема, т.е. любое решение этого уравнения можно аппроксимировать элементарными решениями в топологии пространства $O(\Omega)$.

Предварительные сведения

Симметризация. Выберем произвольный многочлен $\pi \in \mathbb{C}[\xi]$ степени $q \geq 1$. Отображение $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid \xi \mapsto \pi(\xi)$ определяет аналитическое накрытие $(\mathbb{C}, \pi, \mathbb{C})$. Для любого $\xi \in \mathbb{C}$ символами ξ_0, \dots, ξ_{q-1} обозначаем элементы слоя $\pi^{-1}(\lambda)$, где $\lambda := \pi(\xi)$. Если λ – критическая точка аналитического накрытия $(\mathbb{C}, \pi, \mathbb{C})$, то отдельные элементы упорядочения ξ_0, \dots, ξ_{q-1} совпадают. Точнее, каждая точка ξ_j из слоя $\pi^{-1}(\lambda)$ в этом перечислении встречается столько раз, какова ее кратность.

Множество $U \subseteq \mathbb{C}$ называется симметричным, если $U = \pi^{-1} \circ \pi(U)$. Комплексная функция g , определенная на симметричном множестве U , называется симметричной, если она представляется в виде композиции $g = \hat{g} \circ \pi$, где \hat{g} – комплексная функция, заданная на образе $V := \pi(U)$. Если $g = \hat{g} \circ \pi$ и функция \hat{g} локально аналитична на множестве V , то функцию φ называем локально аналитической симметричной функцией. Если $U = \mathbb{C}$ и \hat{g} – целая функция, то симметричная функция $g = \hat{g} \circ \pi$ называется целой симметричной. Символом $O_\pi(U)$ обозначим семейство всех локально аналитических симметричных функций на открытом симметричном множестве U с топологией равномерной сходимости на компактах.

Пусть U – открытое симметричное множество в \mathbb{C} . Выберем произвольную функцию $g \in O(U)$ и рассмотрим функцию $(symg)(\xi) := g(\xi_0) + \dots + g(\xi_{q-1})$, где $\xi \in U$ и ξ_0, \dots, ξ_{q-1} – упорядочение слоя $\pi^{-1}(\pi(\xi))$. Эта функция является локально аналитической симметричной, т.е. принадлежит пространству $O_\pi(U)$ [1, предложение 2.2]. Образ $(symg)(\xi)$ называется симметризацией функции g (на множестве U). По определению симметричной функции симметризация $symg$ произвольной функции $g \in O(U)$ представляется в виде композиции $\hat{g} \circ \pi$, где \hat{g} является локально аналитической на открытом множестве $V := \pi(U)$.

Пусть $\xi \in U$, $\lambda := \pi(\xi) \in V$ и $\xi_0, \dots, \xi_{q-1} \in U$ – произвольное упорядочение слоя $\pi^{-1}(\lambda)$. Если функция f является симметричной на U , то

$$(symfg)(\xi) := \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} f(\xi)g(\xi_j) = f(\xi) \left(\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} g(\xi_j) \right) = f(\xi)(symg)(\xi).$$

Значит, справедливо

Предложение 1. Если $g \in O(U)$ и f – симметричная функция на U , то для любого $\xi \in U$ имеем $(symfg)(\xi) = f(\xi)(symg)(\xi)$.

Обозначим символом $s_n(\xi)$ симметризацию $(symz^n)(\xi)$ одночлена z^n , $n \in \mathbb{Z}_+$ (на множестве \mathbb{C}). Элементарные оценки убеждают в справедливости следующего утверждения.

Предложение 2. Функция $s_n(\xi) \in O_\pi(\mathbb{C})$ является многочленом, степень которого не превосходит n . Для любого $n \in \{0, \dots, q-1\}$ функция $s_n(\xi)$ – константа.

Оператор $O(U) \rightarrow O(V) | g \mapsto \hat{g}$ обозначаем тем же символом sym . Отличаем в обозначениях этот оператор от оператора симметризации $O(U) \rightarrow O_\pi(U) | g \mapsto symg$ лишь указанием другой переменной $(symg)(\lambda)$, $\lambda \in V$. Символом $sym^{(m)}$ обозначаем композицию $D^m \circ sym$, где D – оператор дифференцирования (или частного дифференцирования) по переменной $\lambda \in V$, т.е. $(sym^{(m)}g)(\lambda) := \hat{g}^{(m)}(\lambda)$.

Симметричные представления

Для любой функции $g(\xi) \in O(U)$ имеет место единственное симметричное представление

$$g(\xi) = \sum_{p=0}^{q-1} \xi^p g_p(\xi), \quad g_p(\xi) \in O_\pi(U). \quad (2)$$

При этом если ξ – обыкновенная точка аналитического накрытия $(\mathbb{C}, \pi, \mathbb{C})$, то симметричный коэффициент $g_p(\xi)$ представляется в виде разностного отношения

$$g_p(\xi) = \frac{\Delta_p(1, \dots, g(\xi), \dots, \xi^{q-1})}{\Delta(1, \dots, \xi^{q-1})}, \quad p \in \{0, \dots, q-1\}, \quad (3)$$

где $\Delta_p(1, \dots, g(\xi), \dots, \xi^{q-1})$ – определитель, полученный из определителя Вандермонда $\Delta(1, \dots, \xi^{q-1})$ заменой p -го столбца $(\xi_0^p, \dots, \xi_{q-1}^p)^T$ на столбец $(g(\xi_0), \dots, g(\xi_{q-1}))^T$. Символ $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^T$ означает оператор транспонирования матрицы \mathbf{a} [1, теорема 2.1; 9].

Отметим, что из предложений 1 и 2 вытекает, что симметризация произвольной функции $g(\xi) \in O(U)$ допускает представление

$$(symg)(\xi) = \sum_{p=0}^{q-1} s_p g_p(\xi), \quad s_p := sym \xi^p \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

показывающее, что оператор симметризации коммутирует с оператором дифференцирования по параметру. Точнее, пусть U_0 – открытое множество в \mathbb{C} ; $O(U \times U_0)$ – семейство всех локально аналитических функций $g = g(\xi, z)$ на декартовом произведении $U \times U_0$; D – оператор частного дифференцирования $O(U \times U_0) \rightarrow O(U \times U_0)$ по переменной $z \in U_0$. Справедливо

Предложение 3. Если $g = g(\xi, z) \in O(U \times U_0)$, то для любого $(\xi, z) \in U \times U_0$ имеет место равенство $(D \circ sym)(g)(\xi, z) = (sym \circ D)(g)(\xi, z)$.

Доказательство. Пусть $g \in O(U \times U_0)$ и $g' := Dg \in O(U \times U_0)$. При фиксированном $z \in U_0$ функции $\xi \mapsto g(\xi, z)$ и $\xi \mapsto g'(\xi, z)$ принадлежат пространству $O(U)$. Воспользуемся симметричными представлениями этих функций. В обыкновенных точках $\xi \in U$ аналитического накрытия $(\mathbb{C}, \pi, \mathbb{C})$ симметричные функции $g_p(\xi, z)$ и $g'_p(\xi, z)$ представляются в виде $\frac{\Delta_p(1, \dots, g(\xi, z), \dots, \xi^{q-1})}{\Delta(1, \dots, \xi^{q-1})}$, $\frac{\Delta_p(1, \dots, g'(\xi, z), \dots, \xi^{q-1})}{\Delta(1, \dots, \xi^{q-1})}$. Замечаем, что $Dg_p(\xi, z) = g'_p(\xi, z)$. При этом в силу соотношения (4) для всех $\xi \in U \cap \mathbb{C}_*$ и всех $z \in U_0$ выполняются равенства

$$(D \circ sym)(g)(\xi, z) = \sum_{p=0}^{q-1} s_p g'_p(\xi, z) = (sym \circ D)(g)(\xi, z).$$

Из соображений непрерывности вытекает, что доказываемое равенство выполняется для всех $\xi \in U$ и всех $z \in U_0$. Предложение доказано.

Если $g(\xi)$ – многочлен, то коэффициенты $g_p(\xi)$ симметричных представлений (2) и (4) тоже являются многочленами. Точнее, справедливо

Предложение 4. Если $g(\xi)$ – многочлен степени n , то коэффициент $g_p(\xi)$ является многочленом, степень которого не превосходит $n - p$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $q > 1$ и многочлен $g(\xi)$ является одночленом ξ^n , $n \in \mathbf{Z}_+$. Пусть $\varepsilon > 1$ и ξ – обыкновенная точка аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$; ω – циклический биголоморфизм из $*Deck(\mathbf{C}_*/\pi)$. Если $\xi_j := \omega^j \xi$, $j \in \{0, \dots, q-1\}$, то при достаточно большом $R > 0$ вне круга $|\xi| < R$ выполняются неравенства

$$|\xi_j| \leq \varepsilon |\xi|, \quad j \neq i \in \{0, \dots, q-1\}. \quad (5)$$

С другой стороны, по свойствам многочленов $Arg \xi_j^q = Arg \xi^q + o(1)$, $\xi \rightarrow \infty$. Значит, мы вправе считать, что вне круга $|z| < R$ выполняются еще и неравенства

$$|\xi_j - \xi_i| \geq |\xi| \sin \frac{\pi}{q}, \quad j \neq i \in \{0, \dots, q-1\}. \quad (6)$$

Неравенства (5) и (6) позволяют оценить коэффициенты $(\xi^n)_p$ симметричного представления одночлена ξ^n вне круга $|\xi| < R$. Действительно, сумма $1 + \dots + (p-1) + n + (p+1) + \dots + (q-1)$ равна $m := \frac{q(q-1)}{2} - p + n$. Значит, вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{\xi : |\xi| < R\}$ выполняются оценки

$$|\Delta_p(1, \dots, \xi^n, \dots, \xi^{q-1})| \leq \begin{vmatrix} 1 & \dots & |\xi_0|^n & \dots & |\xi_0|^{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & |\xi_{q-1}|^n & \dots & |\xi_{q-1}|^{q-1} \end{vmatrix} \leq q! \varepsilon^m |\xi|^m, \quad \text{а в силу (5)}$$

$$|\Delta(1, \dots, \xi^{q-1})| = \prod_{0 \leq i < j \leq q-1} |\xi_j - \xi_i| \geq \left(|\xi| \sin \frac{\pi}{q} \right)^{m+p-n}.$$

Значит, вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{z : |z| < R\}$ для всех целых $n \geq 0$

$$|(\xi^n)_p| = \frac{|\Delta_p(1, \dots, \xi^n, \dots, \xi^{q-1})|}{|\Delta(1, \dots, \xi^{q-1})|} \leq q! \left(\frac{\varepsilon}{\sin \frac{\pi}{q}} \right)^{q(q-1)} \varepsilon^n |\xi|^{n-p}. \quad (7)$$

Из этой оценки вытекает, что коэффициент $(\xi^n)_p$ является многочленом, степень которого не превосходит $n - p$. Предложение доказано.

Порождающий эндоморфизм целых функций

Пусть $a_0(\xi), \dots, a_{q-1}(\xi)$ – произвольный набор многочленов, не все из которых равны тождественному нулю. Считаем, что степень полинома $a_p(\xi)$ не превосходит p . Рассмотрим линейный оператор A , действующий из пространства $O(\mathbf{C})$ в пространство $O(\mathbf{C})$ по правилу

$$A: g(\xi) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\xi) g_p(\xi), \quad (8)$$

где $g_0(\xi), \dots, g_{q-1}(\xi)$ – симметричные коэффициенты представления (2) (на $U = \mathbf{C}$). Исследуем свойства эндоморфизма $A: O(\mathbf{C}) \rightarrow O(\mathbf{C})$.

Предложение 5. При любом целом $n \geq 0$ образ $A(\xi^n)$ является многочленом, степень которого не превосходит n .

Доказательство. Степень полинома $a_p(\xi)$ не превосходит p по определению. При этом по предложению 4 симметричный коэффициент $(\xi^n)_p$ симметричного представления одночлена ξ^n является многочленом степени $\leq n - p$. Значит, образ $A(\xi^n)$ является многочленом, степень которого не превосходит n . Предложение доказано.

Предложение 6. Эндоморфизм $A : O(\mathbb{C}) \rightarrow O(\mathbb{C})$ является непрерывным.

Доказательство. Выберем произвольную последовательность целых функций $g^{(k)}(\xi)$, сходящуюся к нулю в пространстве $O(\mathbb{C})$, и воспользуемся симметричным представлением этих функций. Симметричные функции $g_p^{(k)}(\xi)$ представляются в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \xi_0] \xi^0 & \dots & [\xi_0] g^{(k)} & \dots & [\xi_0] \xi^{q-1} \\ \xi_0 \xi_1] \xi^0 & \dots & [\xi_0 \xi_1] g^{(k)} & \dots & [\xi_0 \xi_1] \xi^{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_0 \xi_1 \dots \xi_{q-1}] \xi^0 & \dots & [\xi_0 \xi_1 \dots \xi_{q-1}] g^{(k)} & \dots & [\xi_0 \xi_1 \dots \xi_{q-1}] \xi^{q-1} \end{vmatrix}$$

[1, предложение 2.1]. Элементами этого определителя являются разделенные разности порядка $\leq q - 1$, которые представляют собой аналитические функции переменной $(\xi_0, \dots, \xi_{q-1})$. Достаточно показать, что все элементы p -го столбца определителя стремятся к нулю на любом компакте. Выберем произвольный компакт $d \subset \mathbb{C}$. Отображение $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является собственным, значит, прообраз $d' := \pi^{-1} \circ \pi(d)$ – симметричный компакт в \mathbb{C} и $d \subseteq d'$. Выберем $R > 0$ и $\varepsilon \in (0, R)$ так, чтобы выполнялось неравенство $\max_{\xi \in d'} |\xi| < R - \varepsilon$. При фиксированных $\xi_0, \dots, \xi_{q-1} \in d'$ для разделенной разности $[\xi_0 \xi_1 \dots \xi_j] g^{(k)}$ справедливо интегральное представление $[\xi_0 \xi_1 \dots \xi_j] g^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g^{(k)}(\xi) d\xi}{(\xi - \xi_0) \dots (\xi - \xi_j)}$, где L – положительно ориентированная граница круга $|\xi| \leq R$ [10, гл. 1, §4]. Если $\xi \in d$, то $\pi^{-1} \circ \pi(\xi) := \{\xi_0, \dots, \xi_{q-1}\} \subseteq d'$, и из указанного интегрального представления следует оценка $|\xi_0 \xi_1 \dots \xi_j] g^{(k)}| \leq \frac{R}{\varepsilon^{j+1}} \max_{|\xi|=R} |g^{(k)}(\xi)|$.

Так как $\max_{|\xi|=R} |g^{(k)}(\xi)| \rightarrow 0$, то $\max_d |[\xi_0 \xi_1 \dots \xi_j] g^{(k)}| \rightarrow 0$. Отсюда вытекает, что $g_p^{(k)} \rightarrow 0$ равномерно на d для любого $p \in \{0, \dots, q - 1\}$. Следовательно,

$$|A(g^{(k)})| = \left| \frac{1}{\Delta} \sum_{p=0}^{q-1} a_p \Delta_p(g^{(k)}) \right| \leq \sum_{p=0}^{q-1} |a_p| |g_p^{(k)}| \rightarrow 0 \text{ равномерно на } d. \text{ В силу произвольности выбора}$$

компакта $d \subset \mathbb{C}$ оператор A является непрерывным эндоморфизмом пространства $O(\mathbb{C})$.

Предложение 7. При любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|A(\xi^n)(\xi)|}{\exp \varepsilon |\xi|} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\varepsilon e}. \tag{9}$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ найдутся такие $N \in \mathbb{N}$ и $R > 0$, что для всех $n \geq N$ вне круга $|\xi| < R$ выполняется неравенство

$$|A(\xi^n)(\xi)| \leq \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e} \right)^n e^{\varepsilon |\xi|}. \tag{10}$$

Пусть $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. В силу (7) при достаточно больших $R > 0$ и $C > 0$ вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{\xi : |\xi| < R\}$ для всех целых $n \geq 0$ справедливо неравенство $|(\xi^n)_p(\xi)| \leq C \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |\xi|^{n-p}$. Значит, при достаточно больших $R > 0$ вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{\xi : |\xi| < R\}$ имеем

$$|A(\xi^n)(\xi)| \leq \sum_{p=0}^{q-1} |a_p(\xi)| |(\xi^n)_p(\xi)| \leq C \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |\xi|^n \sum_{p=0}^{q-1} \frac{a_p(\xi)}{\xi^p}.$$

В силу предложения 5 степень полинома $a_p(\xi)$ не превосходит p . Значит, при достаточно больших $R > 0$ и $C > 0$ вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{\xi : |\xi| < R\}$ имеем $|A(\xi^n)(\xi)| \leq C \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |\xi|^n$. С другой стороны, функция $r \mapsto r^n e^{-\varepsilon_1 r}$ в точке $r := \frac{n}{\varepsilon_1}$ принимает свое максимальное на луче $r \geq 0$ значение $\left(\frac{n}{\varepsilon_1 e}\right)^n$. Значит, вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{\xi : |\xi| < R\}$ для всех целых $n \geq 0$ выполняются

$$\text{неравенства } |A(\xi^n)(\xi)| \leq C \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^n |\xi|^n \leq C \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n e^{\varepsilon_1 |\xi|}.$$

Отсюда следует, что при некотором $R \geq 0$ для всех целых $n \geq 0$ вне множества $\mathbf{C}_* \cap \{\xi : |\xi| < R\}$ выполняется неравенство (10). Так как критическое множество аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ является конечным, то это неравенство выполняется для всех целых $n \geq 0$ вне круга $\{\xi : |\xi| < R\}$. Предложение доказано.

Пусть U – открытое множество в \mathbf{C} . Функция $(h, \xi) \mapsto e^{h\xi}$ является локально аналитической на декартовом произведении $U \times \mathbf{C}$. Обозначим через D оператор частного дифференцирования $O(U \times \mathbf{C}) \rightarrow O(U \times \mathbf{C})$ по переменной $h \in U$, $\pi(D)$ – соответствующий дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Справедливо

Предложение 8. Для любых $h \in U$ и $\xi \in \mathbf{C}$ имеет место равенство $\pi(D) \circ A(e^{h\xi}) = \pi(\xi)A(e^{h\xi})$.

Доказательство. Зафиксируем $h \in U$ и воспользуемся симметричным представлением показательной функции $\xi \mapsto e^{h\xi}$. По определению оператора A имеем $A(e^{h\xi}) := a_0(\xi)(e^{h\xi})_0 + \dots + a_{q-1}(\xi)(e^{h\xi})_{q-1}$. При этом $\pi(D)(e^{h\xi})_p = \pi(\xi)(e^{h\xi})_p$. Значит,

$$\begin{aligned} \pi(D) \circ A(e^{h\xi}) &= \pi(D) \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\xi)(e^{h\xi})_p = \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\xi) \pi(D)(e^{h\xi})_p = \\ &= \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\xi) \pi(\xi)(e^{h\xi})_p = \pi(\xi) \sum_{p=0}^{q-1} a_p(\xi)(e^{h\xi})_p = \pi(\xi)A(e^{h\xi}). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Однородное уравнение π -свертки

Определение оператора π -сдвига. Пусть Ω_0, Ω – односвязные области в комплексной плоскости. Будем считать, что при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется включение $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$, где U_ε – круг $\{h : |h| < \varepsilon\}$. Пусть A – некоторый непрерывный эндоморфизм пространства целых функций. Дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$, называется оператором A -сдвига (на шаг h), если он непрерывен и его характеристическая функция совпадает с образом $A(e^{h\xi})$ [3].

Выберем произвольный набор многочленов $a_0(\xi), \dots, a_{q-1}(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]$, не все из которых равны тождественно нулю. Считаем, что степень q_p полинома a_p не превосходит p . Зафиксируем произвольное $h \in U_\varepsilon$ и рассмотрим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{h\xi})^{(n)}(0)}{n!} (D^n f)(\zeta), \quad (11)$$

где $z \in \Omega$, $\zeta \in \Omega_0$ и линейный оператор $A : O(\mathbb{C}) \rightarrow O(\mathbb{C})$ действует по правилу (8). Из предложений 6 и 7 вытекает, что при любом $f(z) \in O(\Omega)$ ряд (11) сходится равномерно по (ζ, h) на компактах из бицилиндра $\Omega_0 \times U_\varepsilon$ [2, предложение 11]. Это означает, что образ $AT_h(f)$ является аналитической функцией по переменной (ζ, h) на бицилиндре $\Omega_0 \times U_\varepsilon$ при любом $f \in O(\Omega)$. Отсюда следует, что линейный оператор AT_h действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$. Оператор $AT_h : O(\Omega) \rightarrow O(\Omega_0)$, определенный по правилу (11), назовем оператором π -сдвига (на шаг h).

Пусть $O^*(\Omega)$ – сильное сопряженное к пространству $O(\Omega)$; $P(\Omega)$ – интерпретация пространства $O^*(\Omega)$ в терминах преобразования Лапласа L_Ω , которое каждому функционалу $S \in O^*(\Omega)$ ставит в соответствие его характеристическую функцию $\varphi(\xi) := \langle S, e^{\xi z} \rangle$. Оператор $AT_h^\# : P(\Omega_0) \rightarrow P(\Omega) | g \mapsto L_\Omega \circ AT_h^* \circ L_{\Omega_0}^{-1}(g)$ называется дуальным по отношению к оператору AT_h . Здесь $AT_h^* : O^*(\Omega_0) \rightarrow O^*(\Omega)$ – сопряженный оператор к оператору AT_h ; $L_{\Omega_0}^{-1}$ – обратный оператор к оператору Лапласа $L_{\Omega_0} : O^*(\Omega_0) \rightarrow P(\Omega_0)$. Из [2, лемма 1] для любого g из $P(\Omega_0)$ имеем $AT_h^\#(g) := L_\Omega \circ AT_h^* \circ L_{\Omega_0}^{-1}(g) = gA(e^{hz})$.

Предложение 9. Оператор AT_h является оператором A -сдвига и допускает представление

$$AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A(z^n)(D)(f)(\zeta), \quad (12)$$

в котором ряд при любом $f(z) \in O(\Omega)$ сходится равномерно по (ζ, h) на компактах из бицилиндра $\Omega_0 \times U_\varepsilon$.

Доказательство. По определению оператора AT_h его характеристическая функция совпадает с образом $A(e^{h\xi})$. При этом в силу предложения 8 для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство (9). По [2, предложение 12] для любого $f(z) \in O(\Omega)$ образ $AT_h(f)$ представляется в виде ряда (12). При этом ряд (12) сходится равномерно по (ζ, h) на компактах из бицилиндра $\Omega_0 \times U_\varepsilon$. Оператор $AT_h : O(\Omega) \rightarrow O(\Omega_0)$ является непрерывным. Действительно, по [2, предложение 10] дуальный оператор $AT_h^\# : g \mapsto gA(e^{hz})$ – непрерывный, значит, и сам оператор AT_h является непрерывным [2, п. 2.3]. Согласно определению оператора A -сдвига, оператор π -сдвига AT_h является оператором A -сдвига, где непрерывный эндоморфизм $A : O(\mathbb{C}) \rightarrow O(\mathbb{C})$ действует по правилу (8). Предложение доказано.

Из предложения 9 вытекает, что при любом $f \in O(\Omega)$ образ $AT_h(f)$ лежит в пространстве $O(\Omega_0 \times U_\varepsilon)$. Говорим, что оператор AT_h перестановочен с дифференциальным оператором $\pi(D)$, если на пространстве $O(\Omega)$ выполняется соотношение $\pi(D) \circ AT_h = AT_h \circ \pi(D)$. Слева оператор $\pi(D)$ действует по переменной h в пространстве $O(\Omega_0 \times U_\varepsilon)$, справа – по переменной z в пространстве $O(\Omega)$.

Предложение 10. Оператор AT_h перестановочен с дифференциальным оператором $\pi(D)$.

Доказательство. По предложению 8 $\pi(D) \circ A(e^{h\xi}) = \pi(\xi)A(e^{h\xi})$. Значит,

$$\left(\pi(D) \circ A(e^{h\xi})\right)^{(n)} = \left(\pi(\xi)A(e^{h\xi})\right)^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \pi^{(n-j)}(\xi)A(e^{h\xi})^{(j)}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \pi(D) \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{h\xi})^{(n)}(0)}{n!} D^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{\pi^{(n-j)}(0)A(e^{h\xi})^{(j)}(0)}{j!(n-j)!} D^n = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A(e^{h\xi})^{(j)}(0)}{j!} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{\pi^{(n-j)}(0)}{(n-j)!} D^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A(e^{h\xi})^{(j)}(0)}{j!} D^j \circ \pi(D). \end{aligned}$$

Следовательно, $\pi(D) \circ AT_h = AT_h \circ \pi(D)$. Предложение доказано.

Определение оператора π -свертки. Пусть Ω_0, Ω – односвязные области в комплексной плоскости \mathbb{C} и $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$ при некотором $\varepsilon > 0$. Выберем произвольный оператор сдвига $AT_h : O(\Omega) \rightarrow O(\Omega_0)$, произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S_0 на пространстве $O(\Omega_0)$, $\varphi_0(\xi)$ – характеристическая функция функционала S_0 . По предложению 9 функция $h \mapsto \langle S_0, AT_h(f) \rangle$ принадлежит $O(U_\varepsilon)$ и называется π -сверткой функции f и функционала S_0 . При фиксированных S_0 и ε линейный оператор $AM_{S_0} : O(\Omega) \rightarrow O(U_\varepsilon) | f \mapsto \langle S_0, AT_h(f) \rangle$ называем оператором π -свертки. Оператор $AM_{S_0} : O(\Omega) \rightarrow O(U_\varepsilon)$ называется оператором A -свертки, если он является непрерывным [3].

В силу предложения 7 для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство (9). Значит, из [2, предложение 13] вытекает

Предложение 11. Оператор π -свертки AM_{S_0} является оператором A -свертки.

Говорим, что оператор AM_{S_0} перестановочен с дифференциальным оператором $\pi(D)$, если для любого $f \in O(\Omega)$ выполняется соотношение $\pi(D) \circ AM_{S_0} = AM_{S_0} \circ \pi(D)$. Слева оператор $\pi(D)$ действует по переменной h в пространстве $O(U_\varepsilon)$, справа по переменной z – в пространстве $O(\Omega)$. Из предложения 10 вытекает

Предложение 12. Оператор π -свертки AM_{S_0} перестановочен с дифференциальным оператором $\pi(D)$.

По предложению 11 оператор AM_{S_0} является непрерывным. Значит, ядро W_{S_0} этого оператора является замкнутым подпространством в пространстве $O(\Omega)$. Следовательно, по предложению 12 ядро W_{S_0} оператора AM_{S_0} является замкнутым $\pi(D)$ -инвариантным подпространством в $O(\Omega)$.

Однородное уравнение свертки. Уравнение

$$AM_{S_0}(f) = 0, \quad f \in O(\Omega), \tag{13}$$

называется однородным уравнением π -свертки. Целая функция $\lambda \mapsto \varphi_0(\lambda) := \langle S_0, e^{\lambda\xi} \rangle$ называется характеристической функцией уравнения (13). Пространство решений $f \in O(\Omega)$ однородного уравнения π -свертки совпадает с ядром W_{S_0} оператора свертки AM_{S_0} и по предложению 12 является замкнутым $\pi(D)$ -инвариантным подпространством в $O(\Omega)$. Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие уравнению (13), принято называть элементарными решениями этого уравнения. Линейный непрерывный оператор (8) называется оператором симметризации (в обобщенном смысле), если существуют такие полиномы $d(z), r(z) \in \mathbb{C}[z]$, что $A(d(z)) = d(z)$, $A(\mathbb{C}[z]) = d(z)\mathbb{C}[r(z)]$.

Справедлива

Теорема. Если область $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ – выпуклая и непрерывный эндоморфизм (8) – оператор симметризации, то для однородного уравнения π -свертки (13) справедлива аппроксимационная теорема, т.е. любое решение этого уравнения можно аппроксимировать элементарными решениями в топологии пространства $O(\Omega)$.

Доказательство проводится по следующей схеме. Пусть Ω – выпуклая область и $\varphi \in P(\Omega)$. Рассмотрим произвольное однородное уравнение π -свертки (13) и предположим, что A – оператор симметризации. Индикатором уравнения (13) называется упорядоченное множество $p_A := \{p_0, \dots, p_{\nu-1}\}$, определенное по правилу $p_k \in p_A \Leftrightarrow p_k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, $\deg a_{p_k}(z) = p_k$.

Говорим, что индикатор p_A декомпозиционно периодичен, если выполнены условие периодичности $p_{k+1} - p_k = q_0$, $p_{\nu} = p_0 + q$ и условие декомпозиции $\pi(z), \frac{a_0(z)}{a_{p_0}(z)}, \dots, \frac{a_{q-1}(z)}{a_{p_0}(z)} \in \mathbb{C}[r(z)]$. Здесь q_0 – степень полинома $r(z) \in \mathbb{C}[z]$. На первом шаге показываем, что A является оператором симметризации тогда и только тогда, когда индикатор p_A декомпозиционно периодичен. Если p_A декомпозиционно периодичен, то полином $\pi(z)$ допускает декомпозицию $\pi(z) = \tilde{\pi}(r(z))$, где $\tilde{\pi}(z)$ – некоторый полином из кольца $\mathbb{C}[z]$; ν – степень полинома $\tilde{\pi}(z)$ и $\nu q_0 = q$. При этом полином $a_{p_0}(z)$ является наибольшим общим делителем $d(z)$ системы многочленов $a_0(z), \dots, a_{q-1}(z)$ и для любого $p \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ имеет место представление $a_p(z) = a_{p_0}(z) \tilde{a}_p(r(z))$, где $\tilde{a}_p(z)$ – тоже некоторые полиномы из кольца $\mathbb{C}[z]$.

На втором шаге рассматриваем линейный оператор $\hat{A} : O(\mathbb{C}) \rightarrow O(\mathbb{C}) | g(z) \mapsto \sum_{k=0}^{\nu-1} \hat{a}_{p_k}(z) \tilde{g}_k(z)$, где $\tilde{g}_k(z)$ – коэффициент $\tilde{\pi}$ -симметричного представления целой функции $g(\xi)$ и $\hat{a}_{p_k}(z) := \frac{a_{p_k}(z)}{a_{p_0}(z)} = \tilde{a}_{p_k}(\xi(z))$, $k \in \{0, 1, \dots, \nu-1\}$.

Эндоморфизм \hat{A} порождает свой оператор $\tilde{\pi}$ -сдвига и свое однородное уравнение $\tilde{\pi}$ -свертки

$$\hat{A}M_{\hat{S}_0}(f) = 0, \quad f \in O(\Omega), \quad (14)$$

где \hat{S}_0 – линейный непрерывный функционал на пространстве $O(\Omega)$ с характеристической функцией $\hat{\varphi}_0(z) := a_{p_0}(z)\varphi_0(z)$. Показываем, что эндоморфизм \hat{A} удовлетворяет условиям $\hat{A}(1) = 1$, $\hat{A}(\mathbb{C}[z]) = \mathbb{C}[\xi(z)]$, т.е. является оператором r -симметризации (в традиционном смысле). Из [2, теорема 2] следует, что аппроксимационная теорема для уравнения (14) выполняется.

На третьем шаге показываем, что уравнения (13) и (14) равносильны, т.е. множество решений W_{S_0} уравнения (13) совпадает с множеством решений $W_{\hat{S}_0}$ уравнения (14). Для этого рассматриваем дуальные аннуляторы $I_{S_0}, I_{\hat{S}_0} \subseteq P(\Omega)$ подпространств $W_{S_0}, W_{\hat{S}_0} \subseteq O(\Omega)$. По предложению 12 дуальные аннуляторы I_{S_0} и $I_{\hat{S}_0}$ совпадают с замыканием в топологии пространства $P(\Omega)$ множества функций вида $p(z)a_{p_0}(z)\varphi_0(z)$, $p(z) \in \mathbb{C}[r(z)]$. Из $I_{S_0} = I_{\hat{S}_0}$ следует $W_{S_0} = W_{\hat{S}_0}$. Этим доказательство завершается.

Список источников

1. Красичков-Терновский И.Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 11. С. 1559–1588.

2. Шишкин А.Б. О непрерывных эндоморфизмах целых функций // *Мат. сб.* 2021. Т. 212, № 4. С. 131–158.
3. Шишкин А.Б. Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // *Записки науч. семинаров ПОМИ.* 2016. Т. 447. С. 129–170.
4. Красичков-Терновский И.Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // *Мат. сб.* 1972. Т. 87 (129), № 4. С. 459–489.
5. Шишкин А.Б. Спектральный синтез для оператора, порожденного умножением на степень независимой переменной // *Мат. сб.* 1991. Т. 182, № 6. С. 828–848.
6. Красичков-Терновский И.Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез // *Мат. сб.* 1992. Т. 183, № 8. С. 23–46.
7. Tatarkin A.A., Saranchuk U.S. Elementary solutions of a homogeneous q -sided convolution equation // *Iss. Anal.* 2018. Vol. 7, № 25. P. 137–152.
8. Татаркин А.А., Шишкин А.Б. Синтез в ядре оператора трехсторонней свертки // *Итоги науки и техники. Современ. математика и ее приложения : тематич. обзор.* 2021. Т. 193. С. 130–141.
9. Shishkin A.B. Symmetric representations of holomorphic functions // *Iss. Anal.* 2018. Vol. 7, № 25. P. 124–136.
10. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей.* М.: Физматгиз, 1959. 400 с.

References

1. Krasichkov-Ternovsky I.F. Spectral synthesis in the complex domain for a differential operator with constant coefficients. I. The duality theorem. *Mat. sb. = Sbornik: Mathematics.* 1991;182(11):1559-1588. (In Russ.).
2. Shishkin A.B. On continuous endomorphisms of entire functions. *Mat. sb. = Sbornik: Mathematics.* 2021;212(4):131-158. (In Russ.).
3. Shishkin A.B. Exponential synthesis in the kernel of the symmetric convolution operator. *Zapiski nauch. seminarov POMI = Journal of Mathematical Sciences.* 2016;447:129-170. (In Russ.).
4. Krasichkov-Ternovsky I.F. Invariant subspaces of analytic functions. I. Spectral synthesis on convex domains. *Mat. sb. = Sbornik: Mathematics.* 1972;87(4):459-489. (In Russ.).
5. Shishkin A.B. Spectral synthesis for an operator generated by multiplication by a power of an independent variable. *Mat. sb. = Sbornik: Mathematics.* 1991;182(6):828-848. (In Russ.).
6. Krasichkov-Ternovsky I.F. Spectral synthesis in the complex domain for a differential operator with constant coefficients. IV. Synthesis. *Mat. sb. = Sbornik: Mathematics.* 1992;183(8):23-46. (In Russ.).
7. Tatarkin A.A., Saranchuk U.S. Elementary solutions of a homogeneous q -sided convolution equation. *Iss. Anal.* 2018;7(25):137-152.
8. Tatarkin A.A., Shishkin A.B. Synthesis in the kernel of the three-way convolution operator. *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic overview.* 2021;193:130-141. (In Russ.).
9. Shishkin A.B. Symmetric representations of holomorphic functions. *Iss. Anal.* 2018;7(25):124-136.
10. Gelfond A.O. *Calculus of finite differences.* Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1959. 400 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Ю.С. Саранчук – аспирант, кафедра теории функций, факультет математики и компьютерных наук.

Information about the author

Y.S. Saranchuk - Postgraduate Student, Department of Function Theory, Faculty of Mathematics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 01.07.2022; одобрена после рецензирования 20.07.2022; принята к публикации 15.11.2022.
The article was submitted 01.07.2022; approved after reviewing 20.07.2022; accepted for publication 15.11.2022.

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

SCIENTIFIC LIFE

Краткое сообщение

doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-1-120-121

**МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ОТНА-2022: СОВРЕМЕННЫЕ
МЕТОДЫ, ПРОБЛЕМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ
И ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА XII», ПОСВЯЩЕННАЯ 80-ЛЕТИЮ
ПРОФЕССОРА Н.К. КАРАПЕТЯНЦА (1942–2005)
(г. Ростов-на-Дону, 21–26 августа 2022 г.)**

**INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE “OTNA-2022: MODERN METHODS,
PROBLEMS AND APPLICATIONS OF OPERATOR THEORY AND HARMONIC
ANALYSIS XII”, DEDICATED TO THE 80TH ANNIVERSARY
OF PROFESSOR N.K. KARAPETYANTS (1942-2005)
(Rostov-on-Don, August 21-26, 2022)**

Конференция проходила в Южном федеральном университете, в котором долгие годы работал Н.К. Карапетянц. Его научные результаты получили широкое международное признание. Автор более 100 научных работ и двух монографий, Николай Карапетович получил ряд фундаментальных результатов в теории интегральных уравнений, теории фредгольмовых операторов и функциональных пространств. На протяжении многих лет Николай Карапетович руководил кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений, научным семинаром, воспитал учеников, ставших впоследствии самостоятельными учеными.

Конференция включена в программу развития Регионального научно-образовательного математического центра (РНОМЦ) Южного федерального университета и поддержана соответствующим проектом Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2022-893. Организатор конференции и председатель программного комитета конференции – доктор физико-математических наук директор РНОМЦ, профессор Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича А.Н. Карапетянц. Существенное число участников, в том числе молодые ученые и пленарные лекторы, получили финансовую поддержку для участия в конференции.

Участников приветствовал М.И. Карякин, директор Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета.

Тематика конференции была связана с различными взаимосвязанными областями фундаментальной математики: аспекты гармонического анализа и теории операторов, эллиптические уравнения, теория аппроксимации, теория дифференциальных уравнений в частных производных, модели и методы в теории вероятностей и др. Конференция проводилась с привлечением ведущих специалистов из различных регионов России, а также из Португалии, Беларуси, ОАЭ, Мексики, Грузии, Испании, Сирии и других стран.

Во время конференции работали 4 параллельные секции: «Функциональный анализ, теория операторов и теория приближений»; «Дифференциальные уравнения и математическая физика»; «Теория функций и функциональных пространств»; «Вероятностно-аналитические модели и методы».

Секция «Теория функций и функциональных пространств» была посвящена памяти выдающегося математика М.М. Драгилева. В этом году исполняется 100 лет со дня его рождения. Доктор физико-математических наук профессор кафедры теории функций и функционального анализа ЮФУ М.М. Драгилев является автором более 50 научных работ, в том числе монографии. Он первым получил характеристику бесконечномерных локально выпуклых пространств, имеющих абсолютные и только абсолютные базисы, был пионером в решении проблемы единственности с точностью до эквивалентности безусловного базиса в топологическом векторном пространстве.

Программа конференции включала доклады приглашенных экспертов, а также выступления 15 молодых учёных в рамках секций. Для молодых ученых была реализована возможность представить свои будущие диссертации и обсудить возможность защиты в совете Южного федерального университета.

Пленарные лекторы конференции: А. Карапетянц (Россия/Ростов-на-Дону), С. Самко (Португалия), А. Миротин (Беларусь), А. Муравник (Россия/Москва), Р. Дудучава (Грузия), К.П. Морено (Испания), Т. Суслина (Россия/С.Петербург), А. Солдатов (Россия/Москва), А. Савин (Россия/Москва), С. Хоури (ОАЭ), А. Антонец (Беларусь), В. Рабинович (Мексика), М. Скопина (Россия/С.Петербург), Н. Бондаренко (Россия/Самара), А. Фаминский (Россия/Москва), Ю. Гликлик (Россия/Воронеж), М. Илолов (Таджикистан), З. Кусраева (Россия/Владикавказ).

Конференции «ОТНА-2022» в 2021 г. присвоен статус сателлитной конференции Международного конгресса математиков (ICM 2022). Избранные статьи участников «ОТНА-2022» будут рассмотрены для публикации в научном журнале Journal of Mathematical Sciences (Серия А), главный редактор А.Н. Карапетянц.



**Указатель материалов, опубликованных в журнале
«Известия высших учебных заведений.
Северо-Кавказский регион. Естественные науки» в 2022 г.**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Абанин А.В., Ватульян А.О., Карякин М.И., Мелихов С.Н., Налбандян Ю.С.</i> Михаил Михайлович Драгилев (1922–2020) – выдающийся математик и учитель	4-1
<i>Абанин А.В., Кораблина Ю.В.</i> Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций	4-1
<i>Абанин А.В., Костина В.О.</i> Степенная ограниченность и эргодичность в среднем дифференциального оператора в весовых пространствах целых функций	4-1
<i>Авсянкин О.Г., Ашихмин С.С.</i> Об ограниченности и компактности одного класса операторов типа свертки в пространствах Морри	3
<i>Бештоков М.Х.</i> Устойчивость и сходимости разностной схемы, аппроксимирующей нелокальную краевую задачу для нагруженного уравнения влагопереноса с производными дробного порядка	4-1
<i>Бештокова З.В.</i> Разностные методы решения интегро-дифференциального уравнения конвекции-диффузии с граничными условиями третьего рода	2
<i>Бибик Ю.В.</i> Особенности применения методов статистической механики при исследовании обобщений классической цепочки Вольтерра	3
<i>Ватульян А.О., Нестеров С.А.</i> Градиентная модель изгиба неоднородной пьезоэлектрической балки	4-1
<i>Данилова Н.В., Житников Д.И.</i> Метод дихотомической кластеризации и оптимальный портфель	2
<i>Дроботов Ю.Е., Вакулов Б.Г.</i> Гладкостные свойства оператора типа потенциала Рисса с логарифмической характеристикой	1
<i>Дронов А.К., Каплицкий В.М.</i> Интерполяционные свойства положительных операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей, и их применение к теории базисов в пространствах Фреше	4-1
<i>Землякова И.А.</i> Интерполяция неполного рынка полным для триномиальной модели в задаче квантового хеджирования	4-1
<i>Иванов П.А.</i> Произведение Дюамеля в пространствах целых функций экспоненциального типа	4-1
<i>Иванова О.А., Мелихов С.Н.</i> О сопряженном к пространству функций, голоморфных на замкнутом полидиске, с мультипликативной сверткой	4-1
<i>Калинина Т.И., Наседкин А.В.</i> Антиплоские задачи о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений	1
<i>Колесников М.Н., Павлова А.В., Телятников И.С.</i> К исследованию влияния дефекта покрытия на поверхностный волновой процесс	4-1
<i>Омарова А.Г.</i> Об устойчивости и сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто	1
<i>Полякова Н.М.</i> Начально-краевая задача о течении в кровеносном сосуде	4-1
<i>Попов В.А.</i> Аналитическое продолжение локально однородного и неоднородного риманова многообразия	2
<i>Попов В.А.</i> Локально изометричные римановы аналитические пространства	4-1
<i>Рустанов А.Р., Полькина Е.А.</i> Некоторые вопросы геометрии локально конформно-келеровых многообразий	3
<i>Саранчук Ю.С.</i> Однородные уравнения типа π -свертки	4-1
<i>Сумбатян М.А., Пискунов А.С.</i> Быстрый алгоритм мультиполя в бессеточном методе дискретных вихрей для течений идеальной жидкости	3
<i>Чебаков М.И., Колосова Е.М.</i> Контактная задача о взаимодействии штампа в форме параболоида вращения и пороупругого слоя, закрепленного на упругом основании	2
<i>Юдин А.С.</i> Эффективный метод построения амплитудно-частотных характеристик оболочки	4-1

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

<i>Безуглова О.С., Болдырева В.Э., Морозов И.В., Тагивердиев С.С., Горбов С.Н.</i> Интерпретация результатов гранулометрического анализа почвы в разных школах почвоведения	2
<i>Биарсланов А.Б., Джалалова М.И., Гаджиев И.Р., Асгерова Д.Б., Осипова С.В.</i> Применение космических снимков в исследованиях постпирогенных территорий Северо-Западного Прикаспия	4-2

Бураева Е.А., Маломыжеева Н.В., Швецова Д.А., Безуглова О.С. Радионуклиды в верхнем слое почв особо охраняемых природных территорий Ростовской области	3
Гарькуша Д.Н., Федоров Ю.А. Метан и сероводород в донных отложениях водохранилищ и прудов бассейна Азовского моря	3
Дегтярева Т.В. Формирование микроэлементного состава черноземов обыкновенных Центрального Предкавказья.....	1
Дубинина М.Н., Безуглова О.С. Влияние гуминового препарата на фракционно-групповой состав фосфатов в черноземе обыкновенном карбонатном	1
Ергина Е.И., Жук В.О. Анализ и оценка процессов опустынивания в Крыму	2
Ерохин Ю.В., Хиллер В.В. Герхардит и ликазит из родингитов Баженовского офиолитового комплекса (Средний Урал).....	4-2
Жарикова Е.А., Голодная О.М., Попова А.Д. Экологическое состояние почв придорожной полосы автомагистрали Уссурийск – Пограничный на приграничной территории	4-2
Иванов Е.Н. Современное состояние ледниковых ландшафтов горных регионов юга Восточной Сибири	1
Ивлиева О.В., Ма Цзя, Лю Чэнь Динамика въездного международного туризма в основных туристических регионах Китая.....	2
Латышева Л.А. Органическое вещество гранулометрических фракций и его роль в формировании морфогенетического своеобразия буроземов острова Русский.....	4-2
Лобченко Е.Е., Ничипорова И.П., Оленникова Н.Н., Романюк О.Л., Лямперт Н.А. Пространственно-временные изменения содержания загрязняющих веществ в поверхностных водах бассейна Северной Двины	1
Лутфуллин Р.Н. Влияние глубинного положения кровли пласта С ₂ b и межсолевых мульд на добычные возможности скважин левобережной части Астраханского газоконденсатного месторождения	4-2
Маканникова М.В., Лапшакова Л.А., Бельмач Н.В. Совершенствование управления земельными ресурсами в муниципальном образовании	2
Морковкин Г.Г., Стребкова А.С., Максимова Н.Б., Слажнева С.С. Влияние способов использования почвы на изменение содержания гумуса в чернозёмах выщелоченных умеренно засушливой и колючной степи Алтайского края	2
Назаренко О.В. Изменение увлажнения в Ростовской области за период 1966–2019 годов.....	4-2
Овчаренко Л.А., Короткова Е.А. Роль климатических факторов в формировании стока реки Белой в современный период.....	3
Онищенко В.В., Дега Н.С., Эдиев А.У., Липилин Д.А. Климатогенная трансформация горно-лесных ассоциаций и вектор устойчивых восстановительных сукцессий.....	2
Плотников И.В. Особенности накопления тяжелых металлов в зеленой массе кустарников вида <i>Betula nana</i> (береза карликовая) в условиях повышенной антропогенной нагрузки	3
Попов Ю.В., Пустовит О.Е., Левченко С.В. Геодинамический комплекс апогипербазитов зоны Передового хребта Большого Кавказа	2
Радионон А.А. Математическая модель равновесия столба сжимаемой атмосферы. Часть 1: Стационарные решения для температуры	3
Радионон А.А. Математическая модель равновесия столба сжимаемой атмосферы. Часть 2: Стационарные решения для давления и плотности	4-2
Решетняк В.Н., Закруткин В.Е. Взаимосвязь химического состава и уровня загрязненности речных вод и донных отложений рек бассейна Северского Донца (в пределах Ростовской области).....	3
Салихов Ш.К., Гасанов Г.Н., Асварова Т.А., Яхияев М.А., Гимбатова К.Б. Азот в почвах склоновых экосистем среднегорья Дагестана.....	1
Сальник Н.В., Горбов С.Н., Безуглова О.С., Шерстнев А.К., Скрипников П.Н. Распределение микроэлементов в естественных почвах Ростовской агломерации под различными типами растительных сообществ	1
Саттар-заде Н.А., Имамвердиев Н.А. Геохимические особенности и зональность залежи Филизчайского колчеданно-полиметаллического месторождения (южный склон Большого Кавказа)	4-2
Соловьёва О.В., Дорошенко Ю.В., Тихонова Е.А., Бурдиян Н.В., Витер Т.В. Физико-химические условия в водорослевых матах и их влияние на некоторые группы гидробионтов в гиперсолёных водоёмах (на примере залива Сиваш, Крым).....	3
Усольцева А.Н. Зарубежный и российский опыт организации экологического туризма на особо охраняемых территориях	1
Федоров Ю.А., Костенко Д.Ф., Доценко И.В. Поведение миграционных форм никеля в воде по континууму «эстуарий реки Миус – Таганрогский залив Азовского моря».....	4-2
Хаванский А.Д., Латуш В.В., Бессмертный И.В. Комплексная оценка пространственного развития Ростовской области	4-2

Харитонов А.Л. Геолого-геофизические исследования кольцевых геоморфологических структур на территории юга Русской платформы и перспективы поисков месторождений нефти и газа	4-2
Хлопкова М.В., Гасанова А.Ш., Гусейнов К.М. Конхилиофауна хазарских комплексов дагестанского побережья Каспия.....	1
Хлопкова М.В., Тулышева Е.В. Комплексный подход в палеореконструкциях хазарских трансгрессий Каспия.....	3
Щербина В.Г. Аллелопатический режим почвы после разовой рекреационной нагрузки в лесных экосистемах Сочинского Причерноморья	1

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Амаева Ф.Ш., Абдурахманова А.А., Османов М.М., Ахмедова Г.А. Фитоперифитонные сообщества прибрежной акватории Каспийского моря.....	2
Евстегнеева Н.А., Колесников С.И., Минникова Т.В., Тимошенко А.Н., Цепина Н.И., Казеев К.Ш. Сравнительная оценка токсичности химических элементов по численности бактерий в серопесках	3
Исламмагомедова Э.А., Халилова Э.А., Абакарова А.А. Некоторые биохимические и морфологические свойства дрожжей <i>Saccharomyces cerevisiae</i> в условиях стресса (обзор).....	3
Кузьмина Н.М., Федоров А.В., Николаев Н.В. Особенности фенологии и перспективность интродукции представителей рода <i>Hydrangea</i> в условиях Среднего Предуралья	4-2
Нежинская Е.Н., Безуглова О.С. Новый способ определения корневой массы озимой пшеницы	2
Полин А.А., Попова Н.В., Денисова Т.В. Эйдномия и внутривидовая изменчивость морского ерша <i>Scorpaena porcus</i> Linnaeus, 1758 (Pisces: Scorpaenidae) кавказского шельфа российского сектора Черного моря	2
Пуртова Л.Н., Киселева И.В., Тимофеева Я.О., Емельянов А.Н., Тимошинов Р.В. Изменение содержания гумуса и биологической активности агротемногумусовых подбелов при различных агротехнических приемах обработки почв	3
Тания И.В., Мустафина А.Н., Абрамова Л.М. Морфологические особенности редкого вида <i>Scilla tonanthos</i> C. Koch. в Ричинском реликтовом национальном парке (Республика Абхазия)	1
Цепина Н.И., Колесников С.И., Минникова Т.В., Тимошенко А.Н., Казеев К.Ш. Сравнительная оценка экотоксичности четырех химических форм серебра по ферментативной активности почвы.....	4-2
Чохели В.А., Дмитриев П.А., Козловский Б.Л., Степаненко В.В., Дмитриева А.А., Бушкова А.А., Радзпут В.Д., Купрюшкин Д.П., Капралова О.А., Вардуни Т.В. Идентификация фитопатогенов сельскохозяйственных культур с применением генетических методов и технологий дистанционного зондирования Земли	4-2
Шханацев А.К., Грабенко Е.А., Казеев К.Ш. Биологическая активность буроземов в молодых «окнах» полога леса Кавказского биосферного заповедника	4-2

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Ватульян А.О., Карякин М.И. Яков Михайлович Ерусалимский (к 75-летию со дня рождения).....	1
Доценко И.В., Назаренко О.В., Федоров Ю.А., Положенцев А.Г. Выдающийся географ, исследователь, педагог (к 85-летию Виктора Трофимовича Богучарского)	4-2
Колесников С.И., Тихонов А.В. Защитник природы степей (к 85-летию Виктора Аркадьевича Миноранского)	4-2
Склярченко Г.Ю., Назаренко О.В. Владимир Евгеньевич Закруткин (к 75-летию со дня рождения).....	1

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Международная научная конференция «ОТНА-2022: современные методы, проблемы и приложения теории операторов и гармонического анализа XII», посвященная 80-летию профессора Николая Карапетовича Карапетянца (1942–2005) (г. Ростов-на-Дону, 21–26 августа 2022 г.).....	4-1
Миноранский В.А. Донской фестиваль экологического туризма «Воспетая степь»	2

Над номером работали: Т.А. Ватульян, Л.С. Ворович, Е.М. Колосова, В.И. Литвиненко, О.В. Назаренко, М.С. Шипитко

Подписано в печать 26.12.2022. Выход в свет 28.12.2022. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.
Шрифт Times. Усл. печ. л. 14,61. Уч.-изд. л. 16,30. Тираж 250 экз. Заказ № 8825.

Адрес редакции и издателя (для переписки): 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42, ЮФУ,
журнал «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки»,
e-mail: izvestiya@sfedu.ru, адрес в Интернете: www.izvestiya.sfedu.ru

Адрес редколлегии: 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 2, к. 110,
тел.: +7 (863) 218-40-00 доб. 11-093; доб. 11-094.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ,
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 1, к 104, тел. +7 (863) 243-41-66

Magazine released T.A. Vatulyan, L.S. Vorovich, E.M. Kolosova, V.I. Litvinenko, O.V. Nazarenko, M.S. Shipitko

Signed print December 26, 2022. The publication December 28, 2022. Format 60×84 1/8. Offset paper. Font Times.
Conv. print. sheets 14.61. Publ. sign. 16.30. Edition 250 copies. Order number 8825.

Address of Editorial Board: 344006, Rostov-on-Don, Bolshaya Sadovaya St., 105/42,
SFU, journal “Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science”,
e-mail: izvestiya@sfedu.ru, Web Address: www.izvestiya.sfedu.ru

Address of Editorial Board: 344090, Rostov-on-Don, Stachki Ave, 200/1, build. 2, room 110,
phone +7 (863) 218-40-00 ext. 11-093; ext. 11-094.

Printed in the printing department, and corporate souvenirs,
Publishing and printing complex KIBI MEDIA CENTER, SFU,
344090, Rostov-on-Don, Stachki Ave, 200/1, build. 1, room 104, phone (863) 243-41-66

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
«ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ.
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ»**

Рецензируемый журнал «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» продолжает приём работ. Он имеет статус центрального издания и включён в перечень ВАК по следующим отраслям:

- физико-математические науки (математика, механика);
- науки о Земле.

Принимаются работы и по другим отраслям науки. Также печатаются материалы в разделах «Заметки о книгах», «Научная жизнь», «Штрихи к портрету».

Журнал издается с периодичностью 4 номера в год. С электронной версией можно ознакомиться на сайте Научной электронной библиотеки http://elibrary.ru/title_about.asp?id=7362. Опубликованные статьи индексируются в российских и международных электронных библиотеках и наукометрических базах данных: РИНЦ (RSCI), РУКОНТ, «Киберленинка», ЭБС «Университетская библиотека онлайн», ИВИС, Ulrich, EBSCO, Chemical Abstracts. Журнал включен в Russian Science Citation Index на платформе Web of Science.

Авторы, сохраняя за собой авторские права на работу и передавая журналу «Известия вузов. Северо-Кавказский регион» право первой публикации, автоматически принимают на себя обязательство не печатать её ни полностью, ни частично в каком-либо издании без указания ссылки на оригинальную публикацию в этом журнале.

Издательские услуги оплачиваются организацией или автором после утверждения статьи на редколлегии.

Оформление работ осуществляется согласно правилам:

1. Представляется статья в электронном виде. Перед заголовком указать индекс УДК.
2. Статья оформляется в формате .doc или .docx (MS Word) через 1,5 интервала, шрифтом Times New Roman размером 14 пт, страницы пронумерованы.
3. Сведения об авторах с указанием автора, ответственного за переписку, на русском и английском языках. Экспертное заключение.
4. Полное название организации на русском и английском языках.
5. Название статьи и фамилии авторов на русском и английском языках.
6. Аннотация на русском и английском языках (1000–1500 знаков / 150–200 слов).
7. Ключевые слова на русском и английском языках (8–10 слов).

Журнал распространяется по подписке через объединённый каталог «Пресса России», интернет-каталог «Пресса по подписке». Подписной индекс – 70415 (подписка на полугодие). В неподписной период отдельные номера журнала за нынешний и прошлые годы можно приобрести в редакции.

Адрес для переписки: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42, ЮФУ, редакция журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

Тел./факс главной редакции (863) 218-40-00, добавочный 11-093, 11-094.

E-mail: izvestiya@sfedu.ru

Адрес в Интернете: www.izvestiya.sfedu.ru

ISSN 1026-2237. Doi 10.18522/1026-2237-2022-4-1. Известия высших учебных заведений.

Северо-Кавказский регион. Естественные науки.

2022. № 4-1